数学教学

2005年第6期

目　　录

几何教学中的直观实验与逻辑推理

100009 人民教育出版社 田载今 李海东

一、几何学的研究对象决定了其研究方法包括直观实验与逻辑推理

数学是以数量关系与空间形式("数"与"形")为主要研究对象的科学, 几何学是其中研究"形"的分支. 形者, 几何图形也. 三角形、四边形、圆······是平面几何图形, 柱、锥、台、球······是立体几何图形.

几何图形最初来自客观世界中物体的形状, 但它们比客观原型更典型、更纯粹、更一般. 例如, 初升的太阳、十五的月亮、水中的波纹······都能给人以圆的形象, 而几何中圆的定义是"到定点的距离等于定长的点的集合", 它是从太阳、月亮、波纹等具体的实物模型中抽象出集中刻画圆的形状特点的一般概念.

几何图形可以直观地表示出来, 人们认识图形的初级阶段中主要依靠形象思维. 远古时期人们对几何图形的认识始于观察、测量、比较等直观实验手段, 现代儿童认识几何图形亦如此, 人们可以通过直观实验了解几何图形, 发现其中的规律. 然而, 因为几何图形本身具有抽象性和一般性, 一种几何概念可能包含无限多种不同的情形, 例如有无数种形状不同的三角形. 对一种几何概念所包含的一部分具体对象进行直观实验所得到的认识, 一定适合其他情况吗? 这是直观实验回答不了的问题. 因此, 一般地, 研究图形的形状、大小和位置关系时, 不能仅仅依靠直观实验的方法, 而需要具有一般性和抽象性的方法, 其中包括逻辑推理. 从几何学的历史可以看出, 人们认识图形的高级阶段中主要依靠抽象的逻辑思维, 欧几里得用逻辑链条将对图形零散的认识编织成公理体系, 是几何学发展的一个重要的里程碑.

如果没有逻辑推理, 那么对图形的认识将难以深入.

举个初等几何的简单例子. 测量$\odot O$中的$\angle BOC$和$\angle BAC$(图1), 可以发现$\angle BOC = 2\angle BAC$, 由此我们可以猜想: 同弧上的圆心角是圆周角的2倍.

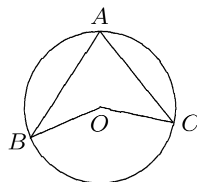


图 1

不断改变图1中点A在圆上的位置, 虽然对每一情形仍可验证上述结论, 但是我们还没有充足的理由断言上述猜想正确. 这是因为弧BC所对的圆周角有无数多个, 我们不可能将它们全部一一测量, 这就无法保证弧BC所对的任何一个圆周角的大小都是圆心角$\angle BOC$的一半. 而要说明上述猜想是真命题, 必须找到不依赖直接观测的方法.

考虑到圆周角的边与直径的位置关系只有三种(图2), 针对每种情况, 利用已经证实的结论("三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和"、"等腰三角形的底角相等"), 可以无懈可击地、合乎逻辑地推出 $\angle BOC = 2\angle BAC$, 这种方法不必一一列举点A在圆上的每个具体位置, 是彻底摆脱实测的方法. 由

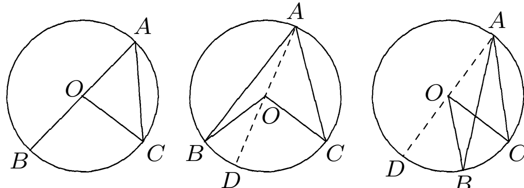


图 2

此可见, 与直观实验相比, 逻辑推理要更严密、更深刻、更一般化, 从而是更高级的研究方法.

事实上, 如果只停留在直观实验阶段, 而没有逻辑推理, 那么人们在认识几何图形时, 即使对一些比较明显的规律也不能作出充分证实. 例如, "三角形的两边中点连线平行于第三边"这个看似简单的规律是不能通过直观实验证明的, 因为两直线无限长, 怎么能实际考察它们是否永不相交呢? 如果不认识几何学内在的逻辑性, 那么只能有限地认识一些关于图形的零散表象, 而不能认识在图形背后蕴涵的许多实质性内容.

二、培养逻辑思维能力是几何教学的重要目标之一

为什么要学习几何? 为什么几何是中学数学课程中的重要内容?

人们通过学习几何可以认识丰富多彩的几何图形, 建立与发展空间观念, 掌握必要的几何知识, 培养运用这些知识认识世界与改造世界的能力. 但是, 这些并不是几何学的全部教育功能. 从更深层次看, 学习几何学的一个更重要的作用是: *以几何图形为载体,培养逻辑思维能力,提高理性思维水平*. 这正是自古希腊开始几何教学一直倍受重视的主要原因.

从实际需要看, 一个普通人一生中运用几何知识的时间、场合, 要比他应该运用逻辑思维的时间、场合少得多. 前者在特定的环境下发生, 而后者经常地、普遍地出现, 它的作用远比前者大得多. 一个人学过几何后, 如果不继续从事与数学关系密切的学习或工作, 他一生中有可能很少甚至不会用到某个几何定理, 但是他肯定应该经常不断地在不同程度上使用逻辑推理来分析问题. 当然, 其他课程也可以培养学生的逻辑思维能力, 学习几何学并不是实现此目的之惟一途径. 但是, 长期以来几何学被普遍认为是适合培养逻辑思维能力的绝好课程, 这是客观事实. 形成这种状况的原因主要有:

1. 几何学的历史悠久, 学科体系成熟;

2. 几何学体系的逻辑性特点格外突出;

3. 几何学的研究对象是几何图形, 结合几何图形, 利用图形语言, 在一定程度上可以降低认识和理解逻辑推理的难度.

数学家杨乐院士说: *"凡是从事数学研究和数学教育的, 都会对从中学学习几何时受到的严格的逻辑思维训练有很深的体会, 似乎很难找到别的东西来代替它对中学生进行严格的逻辑思维培养."*

数学家谷超豪院士说: *"数学成为各门科学可靠的工具, 也正因为它具有最严谨、最严格的特性. 因此, 在基础教育中, 要教会学生在进行运算时要严格地遵循运算的正确法则, 而且要相当熟练, 不引入主观臆想, 换句话说, 要认认真真地、正确地做计算. 要学会严格推理困难就大一些, 但也完全是必须的, 一定要逐步使学生适应这种严格的推理方式, 并且在书写上能反映出来. 特别是在几何的教学上, 一定要重视这种逻辑的演绎, 这也是训练逻辑推理能力的有效方法, 是要重视几何教学的一个原因."*

调查表明, 不仅从事数学研究与数学教育的人有上述看法, 在接受过中学教育的人中持这种观点的也大有人在. 长期的教学实践证明: *几何学的教育功能中最有魅力之处, 恰恰在于它可以在培养逻辑思维能力方面独领风骚.*

按照人的一般认知规律, 认识几何图形的过程, 也是从具体到抽象, 从简单到复杂, 从特殊到一般, 从感性到理性的过程. 根据教育心理学的规律可知, 一般说初中学生多处于认识方法发生升华的阶段, 他们对事物的认识已不满足于表面的、孤立的层次, 而有了向更深层次发展的要求, 即向往"由此及彼, 由表及里"的思维方式. 从几何教学的内容看, 学生们从小学开始已经通过直观实验这种主要方式学习了基础的图形知识, 在他们的头脑中已经积累了一定的关于图形的感性认识, 在初中阶段应该更深入地在"为什么"的层面上认识图形. 显然, 单纯的直观实验这种学习方式已经不适应继续深入学习的需要, 因为这种方式难以真正从道理上对图形规律进行解释, 而逻辑推理的

方式才能担此重任. 因此, 从"实验几何"向"推理几何"的过渡成为初中几何教学必须面对的问题, 培养逻辑推理能力成为初中几何教学必须实现的教学目标.

在初中几何教学中, 应通过哪些方式培养逻辑思维能力? 对三段论形式的证明格式等应把握到什么程度? 在数学教育界曾对这些问题有过许多讨论.

很多人认为: 几何学中的逻辑性在教学中是一把双刃剑, 一方面它能激发一些学生对数学的浓厚兴趣, 使他们的逻辑思维能力得到提高; 另一方面它又使一些学生感到数学难学, 甚至由畏难发展到厌学.

由于学生个体存在差异, 加上某些教学中存在过分强调证题技巧, 题目难度过大, 而对逻辑推理中真正的思想实质缺乏分析与揭示等, 上述两极分化现象确实有一定普遍性. 然而, 解决两极分化现象并不能以降低甚至牺牲逻辑思维能力培养为代价, 而应该寻找有针对性的化消极为积极的方法(例如探索低起点的推理证明教学方法), 在深入浅出方面下工夫. 逻辑推理这种思维活动, 离不开三段论. 几何图形问题的证明, 可以用简明的形式表达其中的逻辑关系, 这在教学中是必不可少的. 对于"证明形式何时出现"、"问题难度达到何种程度"、"学生通过何样途径学习几何证明"等, 应结合教学实际认真研究.

三、几何教学中直观实验与逻辑推理的关系

人们认识几何图形既需要形象思维, 又需要抽象思维, 两者相辅相成, 缺一不可. 虽然我们强调几何教学中逻辑推理的重要性, 但是并不排斥直观实验. 直观实验是初级认识手段, 逻辑推理是高级认识手段. "看一看"、"量一量"、"做一做"等直观实验活动在几何学习的初始阶段的重要性尤为突出, 即使在推理几何阶段的学习中, 直观实验也具有重要的辅助作用, 人们常借助某些直观特例来发现一般规律、探寻证明思路、理解抽象内容, 有时直观实验与逻辑推理是交替进行的.

由于信息技术的发展与普及, 直观实验手段在教学中日益增加, 有些学校还建立了"数学实验室", 这些对于几何学的学习起到积极作用. 随着教学研究的不断深入, 直观实验会在启发诱导、化难为易、检验猜想等方面进一步大显身手. 但是, 直观实验终归是数学学习的辅助手段, 数学毕竟不是实验科学, 它不能象物理、化学、生物等学科那样最后通过实验来确定结论. 实验几何只是学习几何学的前奏曲或第一乐章, 后面的乐曲建立在理性思维基础上, 逻辑推理是把演奏推向高潮的主要手段.

有些关于图形的结论, 是在实验几何阶段通过直观实验认识的, 学生已经接受了这些知识, 对于它们是否还一定要在后面的学习中再通过逻辑推理来认识呢?

对上面问题的答复应该是: 在一般教学中, 不需要对于所有这样的知识都重新通过逻辑推理进行证明, 例如, 对于教学中作为推理的原始根据(公理)的结论, 就不可能也无必要进行证明. 但是根据教学内容的扩展与深化和学生认知发展的需要, 应指出对于某些结论我们只是验证过而它们是可以证明的, 也有一些结论确有必要重新通过逻辑推理进行证明, 以加深对其认识. 例如, "三角形内角和等于180°"是学生在小学阶段已经通过直观实验认识过的知识, 但当时只是初步了解它, 认识方式是度量检验了若干个三角形的内角, 这种方式只是验证而不是证明, 当时是教科书和教师直接告诉学生这个结论对于任何三角形都成立, 并没有说明理由. 在初中的教学中, 一方面随着平行线的性质等新知识的学习, 学生已经具备了证明这个结论的知识基础; 另一方面通过讨论它的证明, 不仅可以体会平行线的性质在分析问题中的应用, 而且可以感受证明的必要性, 进一步从道理上加深对这个重要定理的一般性的认识. 因此, 就有必要安排推导这一定理的教学, 这也是认识上的螺旋式上升. 人教版初中数学课标实验教材中安排了如下一段阅读材料, 它有助于对以上问题的思考.

李老师与小明的对话

李老师: 小明, 为什么说“三角形内角和等于180°”?

小明: 因为我们观察任意一个三角形并量出它的内角时, 都能得出它的内角和等于180°.

李老师: 通过观察、实验等可以寻找规律, 但是由于观察可能有误差, 实验可能受干扰, 考察对象可能不具一般性等原因, 一般说由观察、实验等所产生的“结论”未必正确. 例如, 让一个班的学生每人任意画一个三角形, 再量出它的每个内角, 计算三个内角的和, 得到的结果未必全是180°, 可能有的会比180°大些, 有的会比180°小些.

小明: 如果观察细致, 仪器精确, 不产生误差, 那么依靠这些就能确定结论吗?

李老师: 在几何中仅通过观察、实验等就下结论缺乏说服力. 例如, 即使不考虑误差等因素, 当上面观察的所有结果全是180°时, 人们还会有疑问: “不同形状的三角形有无数个, 我们画出并验证的只是其中有限个, 其余的三角形的内角和是多少呢? 你能对所有三角形都进行验证吗?” 事实上, 不管我们经历多长时间, 画出多少个三角形, 观察、实验的对象也是有限个, 所以难以证明任意一个三角形的内角和等于180°.

小明: 那就没有方法能证明这个结论了吗?

李老师: 有的, 要确认“三角形内角和等于180°”, 就不能仅依靠度量角度的手段和观察、验证的方法, 而必须还要进行推理论证——从理论上理由充足、无懈可击地得出“无论三角形的具体形状如何, 它的内角和一定等于180°”.

小明: 究竟什么是几何中的证明? 它起什么作用?

李老师: 简单地说, 一个几何命题是否正确, 需要经过合乎逻辑的推理论证才能得出结论, 这样的推理论证过程叫做几何证明. 观察、实验等是发现规律的重要途径, 证明则是确定结论的必要步骤. 下面我们讨论怎样证明“三角形内角和等于180°”(略).

有一种说法: 直观实验培养发现能力和创新精神, 逻辑推理培养逻辑思维能力和严谨性, 但对培养创新精神作用不大. 这种说法正确吗?

直观实验确实可以启发人们发现新事物, 但是创新不能仅仅停留在这个层次上, 而需要在此基础上进行科学的思考、探究、论证, 这就需要逻辑思维, 否则无法实现真正的创新. 有一个流传很久的故事: 牛顿见到苹果从树上掉在地上, 才受到启发发现了万有引力定律. 如果把苹果落地看作直观实验, 这个故事给人的印象似乎是直观实验对创新起了主要作用. 但是认真考虑它, 你会发现故事背后隐含了逻辑思维对创新所起的关键作用. 实际上物体下落是无数人司空见惯的现象, 由它引发重大发现的关键, 在于牛顿在观察现象之后进行了合乎逻辑的思考: 为什么物体会垂直下落? 因为有向下的力作用于它; 地球上各处的物体为什么都有这种性质? 因为它们都受到指向地球中心的力; 这些力是谁给的? 是地球; ······一系列因果关系的思考, 导致进一步的实验检验, 又引发更深层的思考······终于产生了新的科学成果.

几何学培养逻辑思维能力的过程, 是逐步深入地引导学生合乎逻辑地思考的过程. 科学的思考方法和习惯, 使人能更好地透过现象抓住本质, 提高思维效率. 这些有利于创新能力的培养. 逻辑思维能力强的人考虑问题的思路应更清晰、更合理、更简洁, 这不会成为条条框框而妨碍创新, 反而有助于创新. 反之, 缺乏科学的思考方法和习惯, 逻辑性不强, 会影响创新. 当然, 在创新的过程中人们是逐步探索的, 并不是一步就彻底解决问题的; 但是, 这样的探索与逻辑思维并不矛盾. 培养学生探究式学习能力, 并非让他们“自由发散”, 而是引导他们“科学发散”, 即有目的地用科学的思维方法进行探究. 因此不必担心逻辑推理会限制学生的创新精神.

数学的创造性不能没有逻辑思维, 学习数学可以帮助养成理性思考的习惯. 数学并不

是公式的堆垒, 也不是图形的汇集, 数学有逻辑性很强的体系. 假如把数学当作图形集成或公式汇编看待, 忽视其方法和构造, 那么数学不但不成为一种武器, 甚至会成为有害的东西——例如将数学机械地乱用, 得出不合理的结果. 几何教学重视逻辑推理, 即逐步让学生学会理性思维. 数学不是只强调计算与规则的课程, 而是讲道理的课程. 培养与运用逻辑思维, 并不是不顾及学生的可接受性一味地片面强调推理的严密和体系的完整, 而是既要体现逻辑推理的作用, 又不片面夸大它. 几何的教学体系有别于几何的科学体系, 在几何教学中, 讲道理并不完全等同于纯粹的形式证明, 几何教学培养逻辑思维能力同样要有的放矢, 循序渐进, 从直观到抽象, 从简单到复杂……

总之, 中学几何教学需要直观实验, 但是不能只有它而没有逻辑推理, 应处理好两者的关系, 注意做好从前者到后者的过渡, 使学生的思维水平得到应有的发展. 当然, 几何学对于人的培养绝不限于逻辑思维, 还有直观思维、应用能力等, 它们都是很重要的.

四、人教版初中数学(几何部分)教材对如何培养逻辑思维能力的设计

人民教育出版社出版的初中数学课标实验教科书(林群主编)对于培养逻辑推理能力, 作了认真的考虑和精心的设计, 整套教科书按照"说点儿理"、"说理"、"简单推理"、"符号表示推理"四个不同层次, 分阶段逐步加深地提高对逻辑推理能力的要求, 循序渐进地发展学生的逻辑推理能力.

在这套教科书的几何部分, 七年级上、下两册中包括"图形认识初步"、"相交线与平行线"、"平面直角坐标系"、"三角形" (不包括全等形的内容) 等章. 学生学习这些内容时, 要先后经历"说点儿理"、"说理"、"简单推理"几个层次, 教科书有意识地逐步强化关于推理的初步训练, 主要做法是在问题的分析中强调求解过程所依据的道理, 体现事出有因、言之有据的思维习惯.

在八年级上册的"全等三角形"这章中, 开始正式出现证明(开始阶段难度不超过包含两个三段论的简化形式), 即进入较完整的"符号表示推理"层次. 经过调查研究, 我们认为从知识内容和学生年龄两方面看, 这时比较适宜学习以正规书写格式表示推理证明. 为作好由实验几何到论证几何的过渡, 教材注意逐步引导学生认识逻辑推理的必要性(例如, 设计"阅读与思考 李老师与小明的对话"等内容).

从教材中正式出现推理证明后, 后续内容注意"一以贯之", 即在"轴对称"、"四边形"、"相似"、"旋转"、"圆"等内容中, 都注意适当体现推理证明的作用, 安排一定数量的例题和习题, 使对推理论证的要求保持到必要的高度, 把"图形的认识"、"图形与变换"、"图形与坐标" 与"图形与推理"有机结合, 从不同角度加深对图形的认识, 避免单纯的简单直观实验. 例如, 对于相似三角形的判定定理, 教材按照先通过度量手段探究, 得出猜想, 再分析证明猜想的思路, 完成定理证明, 从而肯定猜想并运用其进行判定的线索展开, 而不是采取仅仅经过简单验证就直接给出结论的处理方式.

教材的编写者认为: 对于推理能力的培养, 不应片面地理解为仅是会按三段论的格式书写证明过程, 而应更关注感悟推理的必要性, 养成良好的推理习惯和掌握科学的推理方法, 即体会为什么要推理, 理解推理的一般思路和步骤, 能在需要推理时合乎逻辑地进行思考, 这样才能逐步深化地发展理性思维. 因此, 教材应特别关注在分析问题方面下工夫, 把思想方法渗透于具体问题之中, 把逻辑推理的必要性和一般方法渗透于具体问题之中. 教材的编写者还认为: 对于推理能力的培养应不拘泥于单纯的三段论推理形式, 也不局限于几何部分, 而应结合各部分内容中适宜的内容自然地进行. 例如, 这套教材中第一次出现反证法的思想, 是在用方程探究实际问题(属于代数的内容)的过程时, 当时只是隐含与渗透这种思想, 但这样处理解决了一个实际问题, 反映了方程的应用, 体现一种思考方法, 同时也为后面正式学习反证法作了前期铺垫.

有关几何课程的若干基本问题

215006 苏州大学数学科学学院 鲍建生

从二十世纪初的贝利—克莱因运动开始，几何课程始终是中小学数学课程改革的焦点. 从以往几何课程改革的教训看，在构建几何课程时，需要考虑以下几个关键的问题:

一、公理的组织问题

这是历次几何课程改革的争论焦点. 笔者同意下面的观点:

首先，应该肯定公理化思想方法的重要性. 公理不仅被运用于数学本身，也运用于数学的应用方面. 一个公理结构不再是已经详细描述的领域的后验的组织，而相反，它是从数学活动中提取出定义和探索在数学及其应用领域中出现的结构的最重要的方法之一. 因此，向学生传授这种方法不应从数学教育中取消. 而且，在演绎系统中方法论立场的明确性有利于推理的学习和发展精密思维. 最重要的是它有利于把物理——具体环境和它的模型准确地分开，并且在某种意义上，没有别的途径可供选择以把现实模型同数学理论分开来，从而消除可能产生的误解或者混淆不清.

其次，教学实验表明，几何学习的困难与否不在于公理本身(实际上，大多数公理都是一些明显的事实)，而取决于由它所产生的理论体系的深度. "新数"运动时期许多国家的实验已经证明: 如果通过小心地选择教学方法去介绍，那么几何的公理途径对12岁和13岁以上的学生来说是可以达到的. 特别是如果所选择的公理系统不是以随便的方式突然降临到学生的头上，而是在教师的分别指导下精心地分成一个一个小的部分. 同时，对普通教师来说，以固定的形式来组织几何是比较容易的. 它所引起的数学方面和教育学方面的错误远较基于由学生自发探索的教育为少. 它的连贯性和整体性也避免了零碎的、没有统一的、基本结构的学习.[1]

如果同意上述观点的话，那么，一个关键的问题就是如何以及什么时候建立公理体系的问题. 这是教学法上至今未解决的难题. 在一开始就引入严格的公理系统看来是不妥当的，这种做法对低年级的学生来说既无必要又欠可能，只会使学生觉得课程的晦涩，而限制了学生必要的自由思维. 在处理这个问题的各种探索中，有两种方法值得注意: 其一是立足于通俗化了的欧氏公理系统，不追求其完备性和最简性，用直观显见性代替某些未列入的公理，同时把公理的产生(经验、直观认识)同它们的逻辑功能区分开来. 其二是在开始阶段采取所谓"局部组织"的途径，没有任何形式的要求，也不预先给出任何公理系统，而是通过对几何知识和几何活动的局部组织来发展学生的几何概念和推理，并在适当的时候向学生解释几何的逻辑结构，说明进一步的推理只能运用已经建立的概念和定理. 这种局部的组织创造有利于由学生自己来做数学化的工作，有利于逐步地获得接近于日常推理的那种推理. 当然，在学习的最后阶段(如初三)还应该让学生有机会重新讨论建立基本概念和公理集合的必要性以及该集合最简的可能性，以便形成对公理化思想的比较完整的认识.

不管用哪种方法，有一点是肯定的，那就是，不能把任何形式的公理系统当作一个现成的、僵化的事实教给学生. 对此，弗赖登塔尔早就有过精辟的观点，他把为了运用到几何教育中而精心组织的整体公理系统和向量的公理加以比较，作出评论说:[2]

"我反对这样的公理系统，并不是因为它的

复杂性, 而是因为向学生提出的方式. 他们必须运用它来进行机械的演绎——我认为这是一种毫无价值而应认真加以排斥的活动. 和这样的系统有关的基本活动是保留给大纲的作者作如下的处理: 首先以整体的方式把预定要进行公理化的几何材料加以组织, 然后切断所得的公理系统和被组织的材料的联系, 而在实现了公理系统的各个方面后, 最后恢复这种联系. 如果不允许学生自己来完成所有这些活动, 这样的几何公理, 作为教育的对象, 是缺乏意义的."

二、几何课程的现代处理问题

1.课程的统一化

几何的孤立性是传统几何课程饱受批评的重要原因之一. 从"新数"运动提倡统一数学课程以来, 许多国家已不再有独立的几何课程, 几何代数化的势头似乎也越来越强烈. 对此, 笔者认为, 应该借鉴前苏联的改革经验. 他们在总结"新数"运动的教训时得出的结论是: 最好把几何作为一门独立的课程结构内的一个系统来学习, 这比把几何与其他数学科目一起放在一个单一的课程中要好. 把代数和几何放在一个合并起来的课程中学习的考虑通常出自对数学的统一性的需要和建立数学的科目之间的必要联系的需要. 但是, 人们相信, 数学的统一性的本质存在于它的方法之中, 并且学生只能对它有一个初步的了解. 与人为地强化一些联系相比, 系统地、一步一步地表述几何的教材更加有利于对逻辑方法的理解. 换句话说, 从更好地获得对数学本质的理解的观点看, 几何教材内部的逻辑联系比起几何与代数的零碎的联系, 能起到更为重要的作用. 当然, 这并不意味着轻视几何同代数的联系. 恰恰相反, 在注意到上述次序的前提下, 考虑这种联系会是很有用处的[3].

2.几何变换的作用

从ICMI的研究[3]看, 目前世界各国几何课程的一个普遍现象是: 特别重视变换和对称的思想, 许多国家从小学一年级开始就涉及各种几何变换和对称性. 相比之下, 我国的几何课程在这方面显得非常薄弱, 因此, 我国未来几何课程设计的一个重要方向就是强调几何变换的作用.

但是, "新数"运动的经验教训也表明, 对几何变换的处理必须把握好"度"的问题. 特别是在教学的最初阶段运用几何变换, 如果只是采用非正式的片断性的课程, 同时研究某些几何定理和公式, 那么, 这是可以得到赞同的. 但是, 一开始就基于几何变换的一套严格的、系统的课程在各国的实验中则始终没有成功过, 其原因一方面是这种课程需要一个很高的理论概括水平, 超出了学校儿童的理解力所能实现的范围; 另一方面, 则是由于它缺乏一套理想的习题集.

实际上, 波利亚(1971)早就在他的著作中讨论过这个问题, 并且揭示了启发式研究在寻求解题方法中的作用. 人们熟悉的和很不熟悉的两方面的启发式研究, 形成了属于传统的几何课程的一组古典问题的无形的核心. 基于经验, 几代教师, 历经几十年, 选出了这些题目, 并按完美的次序把它们编排出来, 从而创造出了有效的、但未能被人们注意的几何教学法. 正是由于这些特点, 以传统模式进行的几何教学, 被证明是如此的成功. 然而, 事实证明, 老的习题集对新的定理证明方法是不适宜的, 因为新的方法需要新的习题、新的习题体系和新的启发式方法; 而要搞出一套新的习题并使之达到所要求的水平则是非常困难的, 甚至是不可能的, 这不只是经验和时间的问题. 事实上, 对一个证明进行启发式探讨, 只有在它的每一步骤都容易实现的条件下, 才有可能. 要使学生在寻求一个证明的下一个步骤的尝试上, 具有多样性并能获得成功, 也只有在他能容易地看出这一步时才会实现.

3. 几何的向量结构

目前一个普遍的观点是, 向量空间是对传统几何进行现代处理的一条最有效的途径, 其理由可以归纳如下: (1) 作为一个数学模型, 向量空间在物理学中是有用的, 在那里, 整门学科例如热力学把仿射几何当作工具来使用; (2)

从教育学的观点来说, 向量结构可以用比度量几何更为简单的方法加以介绍. 由于在向量空间中, 要遵守的规定的数量比欧氏几何的少, 这就便于局限在它们的范围内, 并且不根据物理的直觉进行无意识的演绎; (3) 几何的向量结构提供接近实数和一般向量空间构造的最有效的、最明白而坚实的途径.

因此, 许多国家倾向于确认这种几何教学的途径. 但各国的实验也证明了, 在中学的较低循环阶段采用向量途径是不可取的: 首先, 在开始阶段, 图形世界的充实显然比概念的简单性和易于接近的形式推理更为重要, 与现实世界相关的各类日常几何活动同样比抽象的变换更为重要, 而且, 在缺乏足够的具体模型、几何经验和空间感的条件下, 学习几何的向量结构则会造成更大的教育上的困难, 而如果想通过学习向量空间来发展儿童的几何想象和直觉, 在概念上也显得过于贫乏; 其次, 在向量结构中, 人们丢弃了许多有趣的和促进学生思维的几何问题(包括度量), 而这些问题对12—15岁的年龄来说是特别适合的. 如果等到在向量空间基础上再建立度量几何, 学生将由于年龄的增长而失去兴趣; 此外, 距离的概念是所有12—15岁儿童的常识的一部分, 并且他们可以自发地尝试去使用它, 因此, 许多人认为推迟介绍度量和距离是和儿童常识的自然发展趋势相反的.

由此可见, 向量结构进入中学课程是一个必然的趋势, 关键是何时进入的问题. 我国现行高中《教学大纲》对向量的引进分两个阶段: 先是平面向量, 然后是空间向量, 并利用空间向量来研究立体几何问题. 这种安排是否合理, 仍值得进一步的思考.

4. 传统与革新

一方面, 本世纪以来, 数学的内部和外部都发生了许多重大的变化, 因此各国都试图在几何核心课程中添加新的内容. 选择新内容的标准是(V.L.Hansen): [4]

(1) 它是新的、重要的数学内容;

(2) 它在其他科学和技术上有许多应用;

(3) 它是可教的;

(4) 它是漂亮的;

(5) 它能提供一条掌握空间的有效的途径;

(6) 它是可学的.

虽然大多数新的数学内容难以进入中小学课堂, 但几何则不一样, 甚至许多最新的研究工作都满足希尔伯特对一个"好"的数学问题的要求: 一个好的数学问题可以解释给街上碰到的第一个行人. 如著名的博物馆问题和邮递员问题. 这两个问题虽然包含着丰富的数学理论, 但其特殊情形却可以用尝试错误的方法予以解决. 当然, 这种几何与人们眼里传统的几何是不同的.

但另一方面, 还有一个观点也值得我们思考, 那就是, 传统的内容对学生来说永远是新的. 欧氏几何作为人类科学思想发展史上的一个里程碑, 许多经典的内容在课程中仍具有重要的地位, 并且在个体的认知发展中同样是不可缺少的. 今天, 我们许多人能够容易地接受几何变换和向量空间的理论, 也许正因为曾经受过欧氏几何的严格的熏陶. 如果我们轻易地越过这个传统, 谁又能保证得到的比失去的更多呢?

此外, 许多传统的内容由于新技术的介入也重新有了生机. 例如, 目前在许多国家, 尺规作图已经从学校的教学大纲中消失, 而这实际上是学习如何处理数学过程初始阶段的很好途径, 同时, 过去的经验说明, 它也是培养有天赋的儿童的数学兴趣的有效途径, 解决一个精致的作图题是一种创造性的活动. 事实上, 利用计算机辅助工具, 那些重要的作图题仍可以重新成为初等几何教学的核心.

三、几何的应用问题

按照Cocroft报告的观点: "任何一个课题, 只有其应用的方式能够为学生所接受时, 才能被包含到课程中去, 这应该作为一条基本的原则." 几何也不例外. 关于几何课程中的应用问题应注意以下几点:

首先, 应该通过许多经典的例子, 让学生了解几何在物理空间中的象征、解释和预测作

用. 如圆锥曲线, 虽然公元前200年左右就已经达到了较高的研究水平, 但它却始终成为一种在许多情形都有用的工具: 17世纪开普勒对行星运动规律的描述; 牛顿对行星沿椭圆轨道运行的推断; 椭圆的反射性质在粉碎肾结石中的应用; 抛物面型天线; 制造机器人所用的椭圆型齿轮等等, 可以说, 圆锥曲线在许多方面都是日常生活的一部分. 再如几何体的最值特性, 在古希腊时代, 人们就开始探求包含最大面积的所谓"最完美"的图形. 最值问题与几乎所有的物理和技术设计问题有关, 因此, 在现代技术中是一个非常重要的研究领域.

其次, 应该让学生了解几何在科学上的许多新的或者是重大的应用, 如海王星的发现、费尔马点问题、方位与时区的计算等; 以及几何在其他学科和领域中的应用, 如机器人、医学、电信、设计与制造等等.

此外, 还应该注意的是, 几何在实际生活中的应用不能归结为所谓建筑学的应用或普通工匠的水平, 而是通过研究在具体空间中显示的并且是杂乱的情况所提出的问题, 而导致问题的数学化, 局部的演绎推理和真正的数学活动. 也就是说, 对学生的几何应用来说, 重要的不是应用本身, 而是应用活动的过程.

四、计算机在几何课程中的作用

计算机正在对几何课程产生越来越多的影响. 这可以从互相补充的两个方面来看: 一方面, 计算机可以大大地改进几何教学, 节省时间, 深化对几何的猜想、讨论、证明; 另一方面, 可以加深对几何图形及其交流的理解, 为学生学习几何概念和结构创造环境, 提供工具. 即使对那些没有条件使用计算机的教师, 也应该时刻注意这些电子设备的存在, 并在教学中重视那些与计算机有关的几何技能.

目前主要有两种观点: 一是计算机作为一种新的文化已经影响到生活和工作的每一个方面, 几何教学应该与此相结合. 由于图形能力越来越重要, 学生"做"几何的方式取决于对图形的研究. 几何成为天文学、物理学等其他学科的模型, 因此, 教学应该重视几何与相关学科的联系. 另外一个观点是计算机不能影响几何的目的和教学, 而只能作为一种辅助的教学手段. 这两个观点根源于几何的双重性质: 作为探索空间关系的工具和作为一套公理系统以及学习演绎推理的材料. 这种双重性可以简单地表示为: 直觉与演绎; 构造与证明; 空间与数量. 有些人认为, 证明必须仍然作为几何教学的骨架, 而计算机可以为证明提供直觉的认识和直观的解释; 另外有些人则认为, 有了计算机的直观解释, 就不必引入严格的证明, 可以把这种证明留给较高的阶段.

这里涉及的一个问题是, 电脑软件的应用是否有利于学生从非正式的证明向正式的证明过渡, 有利于使学生认识到严格证明的必要性, 还是使他们觉得可以代替常规的证明? 目前已有实验表明, 计算机软件的使用可以创造机会使学生考虑"为什么……", "如果这样, 那么会……"以及"如果不这样, 那么会……"这类问题, 从而使他们自己产生需要证明的愿望, 理解证明的目的, 欣赏证明的价值[3].

毫无疑问, 新的技术(特别是计算机)对几何教学的影响是巨大的, 但目前在实际教学中的应用仍停留在较低的水平, 一些具有挑战性的问题还有待于进一步的研究, 例如: 计算机将如何影响几何教学, 它的目的、内容和方法? 经典几何的文化价值是被保护, 还是被进化? 如何去做? 那些由于经济原因而在短期内无法在中小学普及计算机的国家是否可能重新构造几何课程, 以适应新技术的挑战? 等等.

五、几何证明与演绎系统问题

首先, 几何中的证明与演绎系统是一个传统的难点, 许多学生始终不能够真正理解证明的意义, 但如果因此而取消证明的话, 那么同时也就取消了数学的两个重要特征: 一是在数学中, 仅仅知道某种模式是远远不够的, 重要的是理解它, 并用科学的眼光去看待它; 二是几何的元素和结果并不是最重要的, 重要的是这些元素和结果后面隐藏的结构和关系. 这显然是不足取的. 我们的观点是, 如果仍然把证明作为数学课程的一个核心内容的话, 那么,

必须首先在经验和演绎推理之间建立联系, 在课程中既要介绍清楚严格的陈述、定义、演绎推理过程, 也要提供产生和使用实际经验的机会. 在这方面, 计算机可以发挥重要的作用.

其次, 证明与演绎系统的学习有一个循序渐进的过程. 在低年级主要采取的是观察的、实验的方法, 然后是非正式的、直觉的和不严格的途径, 到了一定的年级才转向较为正式的、公理化的、演绎的和严格的几何学习. 这里, 要防止两个极端: 一个是企图通过呈现大量的几何定理来学习演绎推理, 实践已经证明, 这是不可取的, 非正式的途径同样可以是严肃的和有说服力的, 而且, 非正式的途径与严格的几何表示并不是矛盾的, 因此, 未来数学教育家的基本工作就是"严格地表述非正式的数学" [3]. 另一个极端是用实验来取代演绎证明, 从本质上看, 几何并不是一门实验的科学, 几何的真理性具有相对性, 几何中的大多数令人惊奇的事实是无法通过实验获得的, 即使在计算机上也难以做到. 而且, "如果学生在初中阶段没有学会几何证明的话, 那么, 他可能就永远失去了这个机会." [3]

第三, 现在已经公认的是, 对已经完成的证明的死记硬背是毫无教育价值的. 我们相信高年级的学生必须获得演绎理论的结构的思想, 因为这是区分数学与实验科学的主要特征, 但这并不意味着教演绎几何必须从一组公理出发, 每一个命题都必须得到证明. 这样有可能会扼杀学生的兴趣, 从而与课程的目的背道而驰. 因此, 在几何课程的初期, 应该鼓励学生采用"自然 (local)"的演绎证明. 当然, 要注意的是, 在任何阶段, 不管是正式的还是非正式的证明, 其依据必须是被清晰表示的, 并且在直观上是认可的, 如熟知的公理的直观形式. 定理的证明也不能局限于几何. 实际上, 算术、代数和概率论中都有许多提供简单而漂亮的证明的机会. 当然, 不同学科的证明是有所区别的.

此外, 还有淡化概念问题. 实践证明, 从几何课程的开始阶段就给出几何概念的完善的、严格的定义是不恰当的. 从直观几何的观点来看, 定义的分析似乎并不重要. 学生容易记住一张图和图中被描述的图形的性质, 但记不住对一个物体所做的精确语言的描述, 而这种描述是与学生还不十分清楚的一些规则有关的. 定义的分析在学生发展的最初阶段, 相对地说是无效的. 事实上, "下定义"远比"证明"困难的多. 就拿一个简单的例子"一张桌子"来说吧: 我们可以讨论它, 因为我们知道它的性质, 但是如果我们试图定义"一张桌子", 很快就会发现将处在一个困难的境地.

六、几何处理的多样化问题

首先, 在数学家和数学教育家中有一个普遍的看法: 由于几何的多样性, 几何课程内容的学习必须在早期进行, 并且贯穿于整个数学课程内容的学习中. 但是, 如何具体实施这一思想, 以及几何教学的目的、内容和方法, 从小学到大学, 目前仍然都有很大的分歧. 出现这种分歧的原因也许就是因为几何的多样性. 这也说明了目前还没有找到(也许根本不存在)一条最简单、清楚、线性和自然的途径. 不象算术和代数, 即使一些最基本的几何概念如角度、距离等, 在不同的阶段都有不同的观点.

其次, 由于几何的多样性所导致的课程目标的区分化、教材的不断更新换代以及教学的多种途径, 虽然从整体上看具有积极的意义, 但也使得近年来几何课程不统一的问题越来越突出. 实践证明, 频繁地更换教材并不是一件可取的事, 既会给师资培训带来困难, 也会在公众心理上产生不安定因素. 教材的多样化虽然值得鼓励, 但也应该有一个统一的核心部分, 而目前的几何课程所缺少的就是一个统一的清晰的框架.

此外, 几何的多样性既为课程内容的选择带来更多的余地, 但也带来一定的困难. 几何的内容是如此之多, 系统掌握它们是如此困难, 因此, 在选取、组织教学材料时, 我们一方面必须删繁就简, 在合适的时机引入学生可能接受的内容; 另一方面还必须制订几何课程的核心部分. 目前比较一致的观点是, 几何的核心课

课程标准实验教科书几何内容的特点和问题

252100　山东省茌平实验中学　任景业　130024　东北师范大学教育科学学院　孔凡哲

自2001年9月义务教育课程标准数学实验教科书正式投入实验以来, 广大中小学教师对数学课程标准实验教科书的态度也由最初的“新奇”转入“挑剔”, 不唯上, 不唯书, 开始用自己的眼光重新审视教科书, 用自己的标准重新衡量新教科书, 有的教师和专家提出了许多异议, 这是课程改革得到各界人员普遍关注的表征之一, 也是课程、教材研制者和教学一线的广大数学教育工作者衷心所期盼的. 毕竟民主、开放、多元是教材多元化的象征之一, 也是确保我国教科书质量、促进课程、教科书快速、健康发展的基本保障.

本文针对义务教育数学课程标准实验教科书几何中的特点和问题[1][2][3]作进一步的探讨.

一、数学课程标准实验教科书几何内容的处理的特点

初中学段几何内容的处理是争议最多的, 从教材最初的设计及期望看, 教材的编写者希望体现以下四大特点:

1. 由直观感知到操作确认; 再由思辨论证到度量计算, 也即在论证几何之前, 增加了一个直观几何阶段的学习.

2. 扩充了几何中的公理, 以六条公理为推理论证的基础, 削减了繁琐的证明.

3. 增加了空间几何的内容, 从三维的具象再到二维的抽象. 不提平面几何, 而以“空间与图形”冠名.

4. 重视实际运用, 提倡充分利用学生的经验和现实进行数学发展.

教材为什么这样处理, 有哪些实践基础和理论基础? 如此安排是基于什么样的考虑? 现在我们审视教材, 实际实现的情况又是如何呢? 还有哪些工作需要我们去研究、去完善?

二、我国解放后的数学教材发展扫描

让我们回顾一下我国解放后的数学教材的发展, 先从历史的角度来审视以上问题.

1952年以前, 我国基本是沿用以美国教材

程必须包括: (1) 几何教学应该结合度量几何、仿射几何、投影几何以及拓扑几何的基础理论, 当然, 这里除了前两个以外, 对后者仅仅是直观的把握; (2) 低年级的几何教学必须源于周围环境的几何形体及其运动和变换; (3) 在几何教学中应该把几何与有理数、实数的知识结合起来.[3]

参考文献

[1] Robert Morris编. 《几何教学》. 联合国教科文组织数学教育研究丛书第5卷. 人民教育出版社. 1987. 11.

[2] *Principles and Standards for School Mathematics*. http://www.nctm.org/standards 2000/.

[3] New ICMI Study Series Volume 5. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the* 21st *Century*. An ICMI Study (1998年出版).

[4] 联合国教科文组织编. 数学教学中的新趋势(第三卷). 1973年出版.

[5] 张奠宙、曾慕莲、戴再平. 《近代数学史话》. 人民教育出版社. 1990. 12.

[6] 钟启泉主编. 《国外课程改革透视》. 陕西人民教育出版社. 1993. 7.

[7] 陈昌平主编. 《数学教育比较研究》. 华东师范大学出版社. 1995. 5.

为主的旧教材. 从1952年到1957年是学习前苏联, 其教材特点是重视概念教学, 一接触概念就要求掌握其严密性, 以致学生在学习上往往先难后易. 1958年受左倾冒进的影响, 只重视实际而忽视理论, 甚至提出了"打倒欧家店"的口号, 削弱了基础知识和平面几何的推理能力的培养, 但这个影响并不长, 到1959年起就逐渐得到了纠正. 自1962年起, 上海以苏步青为首组织了中学数学教材改革编审委员会, 代数、几何、三角等分科的界限不再存在, 只设数学一门学科. 他们编出的教材有以下特点:

1. 对传统的初等几何内容经过"直观几何", 让学生通过画画、量量、算算, 了解一些几何图形的概念、性质、计算公式. 进而到论证几何, 学会推理论证的方法; 适当扩大作为论证起点的公理, 并删去了一些繁琐的内容.

2. 重视理论联系实际.

3. 重视习题配置, 强调加强基本训练.

4. 提高了中小学数学传统教材中的一些次要内容, 如单变量微积分和概率统计初步.

5. 强调从中学实际出发, 坚持编者与试教者相结合的做法.

1967年至1976年, 中小学教材的理论体系基本上遭到严重破坏. 1977年起, 随着教育的拨乱反正, 数学教学又提出了加强双基训练[4].

上面的史料来源于上世纪七十年代末, 二十多年过去了, 我国的教材建设进入了一个空前发展大好时机, 对教材发展阶段的划分应当有所变化. 我们的观点是, 建国后的教材发展大致可以划分为下面的四个阶段:

1. 上世纪六十年代, 关注双基, 其标志是1965年的大纲和教材, 它表明我国的数学教育已走向成熟.

2. 上世纪七八十年代, 在关注双基的同时, 关注能力的培养. 其标志是九年义务教育大纲的颁布和教材实验.

3. 上世纪九十年代, 陈重穆、宋乃庆先生提出:"淡化形式, 注重实质", 关注知识的获得, 又关注知识的获取过程. 其深入研究导致了"一纲多本"的提出及全国八套半教材的产生.

4. 2000年数学课程标准(征求意见稿)的颁布, 提出了"三位一体"的教育目标, "关注结果, 关注过程, 关注情感态度价值观", 及随后2001年9月开始数学课程标准实验教科书的正式实验.

三、数学课程标准实验教科书发展中的问题审视

由上面的回顾, 尤其是数学家苏步青先生的实践, 我想我们至少可以得出下面的结论:

1. "淡化概念, 注重实质"是我们从中小学实践的教训中得出的结论.

2. 诸如"打倒欧家店"此类过激的言行, 会削弱基础知识和平面几何的推理能力的培养.

全面否定一切, 任何时候都会给数学课程的健康发展带来损害. 我们需要正视每一种事物在发展过程中的有利因素, 在继承中发展.

3. 将代数、几何、三角统一安排处理, 只设数学一门学科, 并不表明削弱了某一分科.

4. 由直观几何到论证几何, 并不是数学课程标准实验教科书的标新立异, 我国有其实践基础. 何时直观, 何时论证, 需要研究和探讨.

说到直观几何, 我们不能不再提前苏联. 1952年到1957年期间, 我们的数学教材是学习前苏联, 由于当时翻译的是前苏联沿用了几十年的教材, 那时的几何教材, 首先翻译过来的是基谢廖夫的《几何》, 是由1915年的版本演变而来的, 内容陈旧可想而知. 但其"公理化的体系, 明白无误的论证, 简明扼要的叙述, 难易相间的习题"特点, 一直影响着我国上世纪的几何教材. 2000年8月国际数学教育大会在东京举行, 莫斯科大学教授N·杜勃林在大会上作了题为《俄罗斯中学里的几何: 过去的传统和当前的状况》, 介绍了俄罗斯的一本几何教材——《直观几何》, 称它"能够引起学生对几何学的真正兴趣", "有望使得学习几何能感受到数学的乐趣和兴奋"[5].

几何中的直观不仅走进了课堂, 而且将其编成了教材, 这恐怕是人们很难想象的. 由此, 我们是不是应当反思:

(1) 就在我们学习他们的系统性、严谨性

时, 他们已经让学生感受直观. 我们应该让我们的孩子学习什么样的几何, 应当如何学习几何, 才不致于使我们的孩子在国际化的竞争中落伍?

(2) 我们的教材在八年级下学期还在经历直观, 是影响了学生的思维发展, 还是促进了思维发展?

(3) 如果要重视直观几何, 那么, 呈现的最好方式还可以做怎样的改进? 是在论证几何之前, 增加了一个直观几何阶段的学习, 还是将直观几何及论证几何小步子紧密地绞织地一起? 也许, 我们还需要拿出深度的调查数据来反馈指导我们今后的改革和实践.

5. 适当扩大作为论证起点的公理, 并删去了一些繁琐的内容, 并不一定会削弱基础知识和平面几何的推理能力的培养.

我们现在审视平面几何的推理能力的培养以及欧几里得几何体系对人的发展的影响, 无疑, 公理化思想是主要的. 但我们一般人都知道的常识是, 欧氏几何的突出特点是, 从几条公理出发, 用演绎的方法, 得出一系列定理或事实. 至于是几条公理, 一般人是说不清的, 再问及这几条公理的具体内容, 能说上来的更是少数. 在实际的教学中, 我们也是如此要求学生的, 要求学生推理要"言之有据", 这个"据", 可以是定义, 可以是公理, 也可以是定理, 至于具体是什么, 只要是"理"就行, 是"黑体字"就行! 由此我们是不是可以得出结论, 扩大作为论证起点的公理, 不能与削弱基础知识和平面几何的推理能力的培养划上等号.

数学课程标准实验教科书删去了一些繁琐的内容, 如圆部分的内容, 由原来的53课时, 压缩为13课时, 原来需要一周学完的垂径定理, 现在只要求一课时学完. 有些教师由于不熟悉课程标准, 不理解教材的编排意图, 或由于习惯使然, 难以改变传统的教学方式, 也出现了"穿新鞋, 走老路"的现象.

由此, 我们是不是应当反思:

(1) 在帮助学生理解演绎方法及公理化思想, 以及培养学生的推理能力上, 我们的教学内容还可以做怎样的选择?

(2) 教学方式还可以怎样实施?

(3) 说理证明题对于培养学生的推理能力具有重要的作用, 那么, 学生需要进行怎样适度的训练——既不过度造成浪费, 又不欠缺形成遗憾———才能达成预期的目标?

(4) 教师培训是长期艰巨的任务, 采取什么样的管理机制, 才不致于使教师培训流于形式和走过场?

6. 理论联系实际是永恒的话题. "贴近学生熟悉的现实生活, 使生活和数学融为一体", 是我国广大优秀教师用实践证明了的宝贵经验. 但是, "现实生活"就是日常生活吗?

从汉武帝尊崇儒术, 到朱元璋"经世致用", "教兼经义治事"的思想, 再到陶行知先生倡导的乡村教育运动; 从美国的新数运动, 到近年来世界各国科学教育改革中形成的"科学、技术与社会"(STS) 新的科学教育构想. 每次运动无一不涉及教育的发展要联系实际的问题. 建国后, 几次大纲的修订, 我们更是把"教育必须同生产劳动相结合"、"理论联系实际"作为我们教育教学的方针和原则. 与之形成对比的是, 脱离实际的教学常常遭到广大教育工作者的抨击. 如上世纪二三十年代, 何思源先生就曾批评当时的教育, "结果把科学知识好象包在一个纸里, 你把这个纸包交给我, 我再把这个纸包传给你." [6] 把学校变成了贩卖知识的场所. 数学课程标准倡导"贴近学生熟悉的现实生活, 使生活和数学融为一体", 应当说, 这是我国广大优秀教师用实践证明了的宝贵经验. 但是"学生熟悉的现实生活"应当如何理解? 他们熟悉的数学世界相对于他们来说是不是"现实的生活"? "现实生活"就是日常生活吗?

7. 必须重视习题的选配. 1997年, 笔者之一曾作过一个调查, 让学生谈一谈喜爱哪科教科书, 并谈一谈喜爱的理由. 让人大感意外的是, 学生喜爱数学教材的主要原因不是因为数学无处不在的应用, 而是"有习题可作" [7]. 由此, 我们可以印证习题在数学教材和学生心目中的地位及苏步青教授在教材编写时的正确

决策. 现行的几种版本的数学课程标准实验教科书, 习题数量及选配明显存在不足, 教师不得不从市场上购买教辅以解燃眉之急. 而市场上购买的教辅, 质量又参差不齐, 这就导致了师生负担的加剧. 教材组如何收集习题资源, 为教材配备足量的习题, 已成当务之急. 另外, 组织有经验的教师编写质量可靠的教辅, 并使之取代学生手中的劣质品, 也是给各地教育主管部门提出的新课题.

重视习题的选配, 应当说也是重视知识结果的必然. 数学课程标准实验教科书习题偏少, 忽视知识结果, 还是刻意追求"情境化"的结果? 还是教材编写者对"现实生活"的理解有待发展?

8. 从学生的经验出发, 以人为本, 以学生为本, 编写适合学生心理年龄特征的教材, 是教材发展的必然.

姚晶先生1979年在《教育研究》上曾撰写《三十年中学数学教学的回顾和今后改革刍议》, 分析了我国三十年中学数学教材的发展轨迹后, 提出如下的建议:

"在小学阶段应让学生画画、折折、量量、算算, 从特殊到一般, 从比较各种不同尺寸的图形中找到这种图形的共同特点, 从而形成某些概念. 以后到了中学阶段再通过逻辑论证归纳推理, 找出各种性质之间的内在联系, 建立几何图形的定义和定理."

姚晶先生的文章发表于二十多年前, 其观点与数学课程标准实验教科书几何内容的处理如出一辙, 只是姚先生把直观几何阶段放在了小学学段. 把操作几何放在小学学段, 还是放在初中学段(前文提及的《直观几何》为俄罗斯中学的教材), 我们还没有心理学上的理论作支持! 在没有心理学理论指导及深度的调查之前, 国际上及我们现在可行的方法是, 吸取一线高素质、有经验的教师参加到教材的编写队伍中来. 而他们繁重的教学任务及所在单位的个体利益, 又往往造成他们参编的羁绊, 如何解决这些矛盾, 让一线教师为我国的教材事业做出更大的贡献, 也是摆在教育主管部门桌面上的重要问题.

由此, 我们应当研究的课题至少有二:

(1) 从心理学的角度审视新课程. 心理学的研究, 多年来沿用西方心理学体系及其成果, 十三亿中国人没有自己的心理学, 也是国人的悲哀! 我们不能仅从经验说, 把这一部分内容放在八年级合适, 把这部分内容放在九年级合适, 应当拿出调查实验后的数据, 用实验的方案说话!

(2)变革人事管理制度, 开发并珍惜教师中的课程资源. 一线教师有实践经验, 最有发言权, 他们的观点往往更有说服力, 我们应当重视. 但由于人事管理制度上的弊端, 很多教师的宝贵经验还不能变成课程改革的财富, 造成了教育资源的无形流失!

9. 关注人的全面发展. 由重视双基教学到双基加能力, 由重知识的获得到既重结果又重过程, 再到当前数学课程标准中提出的三位一体的数学教育目标, 我们可以看出, 关注人的全面发展将是数学课程发展的必然趋势.

要说明的是, 数学课程标准并不是不要获得知识的结果, 为了纠正以往重结果轻过程的弊端, 特别提出要关注知识的获得过程, 如在课程标准解读中, 就曾明确提出: "数学课程的内容不仅要包括数学的一些现成结果, 还要包括这些结果的形成过程."[8] 有的教材的编写, 出现了过于关注过程, 忽视结果的倾向, 我们相信在今后的发展中会得到纠正. 基于此, 我们也可以在此做一个乐观的预期, 未来我国的数学教材建设将会继承我国的优良传统, 珍惜我国一代一代数学教育工作者辛辛苦苦摸索出的经验, 重知识结果, 又重习得过程, 重情感态度价值观, 又重意志行动的培养, 构建出着眼学生全面发展的具有中国特色的数学教育课程新体系.

参考文献

[1] 孔凡哲. 义务教育课程标准实验教科书数学的主要特点. 人大复印报刊资料G35(中学数学教与学). 2004年第7期: 38–43; 中学

(下转第6–34页)

高一“三视图”之教学设计(第一课时)

510631　华南师范大学数学系　韩裕娜

1. 设计思路

本节课的主要任务是介绍组合体的形成方式、三视图的画法步骤及注意事项. 三视图是新课标新增内容之一, 学生在初中阶段对三视图有了初步了解, 高中阶段则在初中的基础上, 进一步掌握简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等及其简易组合)三视图的画法, 并能够识别上述三视图所表示的立体模型. 鉴于这一届高一生在初中时所学课本为旧教材, 尚未学过三视图, 因而本节课有必要先介绍三视图的定义. 考虑到课标还要求学生掌握投影知识, 本节课打算从介绍投影的知识开始, 由投影来定义三视图, 进而介绍三视图的画法等. 本节课容量大, 要呈现的空间图形、动画多, 故利用多媒体计算机来协助教学, 实现教学目标.

2. 教学过程

2.1 复习回顾

展示一些立体图形, 让学生判断是否为台体, 进而让学生回答判断标准是什么. 复习柱、锥、台的特点. 而后, 屏幕显示:

柱: 两个底面平行且全等;
台: 两个底面平行、侧棱(母线)交于一点;
锥: 一个底面, 一个顶点.

2.2 设置悬念, 导入新课

师: 柱、锥、台都是立体图形, 怎样在平面上表示它们呢? 接下来几节课就来学习两种画法: 三视图和直观图. 那么什么是三视图呢? 三视图可由投影来定义, 先来学习什么是投影.

2.3 介绍投影知识

2.3.1 由趣题引出投影定义.

先问学生一个趣题: 什么东西捡不起来?

答案: 影子. (趣味题目引入新知识, 调动学生学习积极性.)

师: 物体在灯光或日光的照射下, 就会在地面上或墙壁上产生影子. 投影就是由这类自然现象抽象出来的. 生活中有许多利用投影的例子, 如手影表演、皮影戏等等 (同时屏幕依次显示相关图片).

简介投影、投影中心、投射线、投影面等定义, 同时屏幕显示:

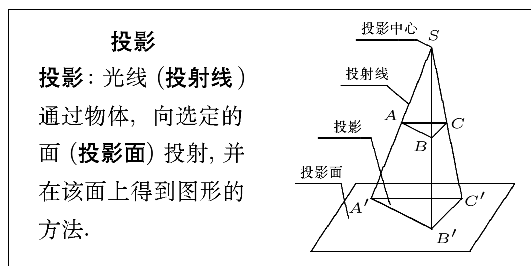


图 1

2.3.2 简介中心投影.

指出: 投影分为两类: 中心投影和平行投影. 介绍中心投影定义, 同时屏幕显示:

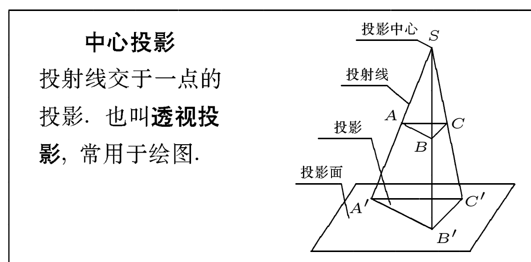


图 2

介绍中心投影的应用, 指出主要运用于绘画中, 并利用多媒体计算机展示名画《最后的晚餐》的形成过程, 让学生体会中心投影的应用, 体会数学在艺术中的作用, 渗透数学文化.

2.3.3 简介平行投影及其种类.

介绍平行投影和斜投影、正投影的定义.

然后显示两幅图(图3,图4), 让学生判断哪个是斜投影、哪个是正投影.

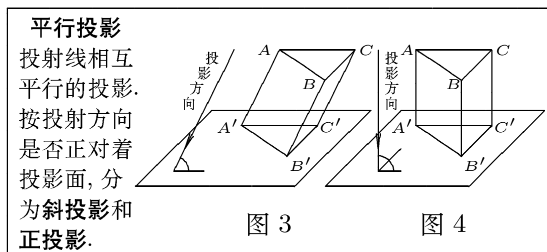
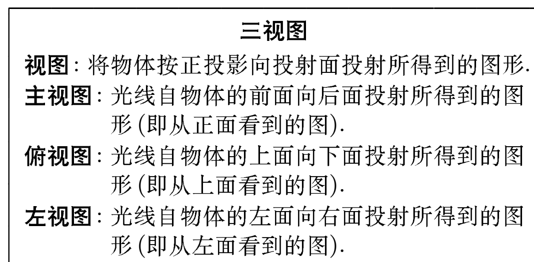


图 3　　图 4

2.4 介绍三视图

2.4.1 讲解三视图的定义,同时在屏幕上显示.



三视图

视图: 将物体按正投影向投射面投射所得到的图形.

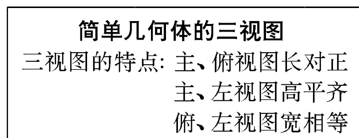
主视图: 光线自物体的前面向后面投射所得到的图形(即从正面看到的图).

俯视图: 光线自物体的上面向下面投射所得到的图形(即从上面看到的图).

左视图: 光线自物体的左面向右面投射所得到的图形(即从左面看到的图).

2.4.2 介绍简单几何体的三视图.

展示立体教具:三维坐标平面板和球、圆柱、圆锥. 启发学生思考球、圆柱和圆锥的三视图分别是什么? 待学生给出答案后, 再用flash动画展示. 让学生感受画三视图的步骤,了解三视图的特点.



简单几何体的三视图

三视图的特点: 主、俯视图长对正
主、左视图高平齐
俯、左视图宽相等

2.5 介绍组合体及其三视图

2.5.1 用flash动画展示组合图形.

2.5.2 用一简单实例展示组合体三视图的画法, 如图5.

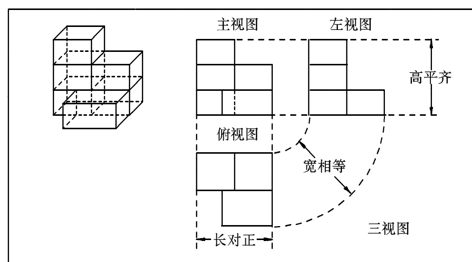


图 5

师: 画组合体的三视图时, 要注意如下几个方面:

(1) 方向问题: 明确物体的主视、俯视、左视的方向, 对同一物体, 若放置的位置不同, 则所画的三视图就有可能不同.

(2) 组合问题: 简单组合体是由哪些简单几何体组合成的, 并注意它们的组合方式, 特别是交线.

(3) 虚实问题: 可见的轮廓线和表面交线用实线表示, 不可见的用虚线表示.

利用四个一模一样的长方体教具, 将它们叠加成如图6所示的组合体. 先让学生讨论其三视图的画法(包括什么线要用虚线), 并画在练习本上, 再抽选一两位学生的三视图, 投影出来, 让全班学生一起探讨是否正确.

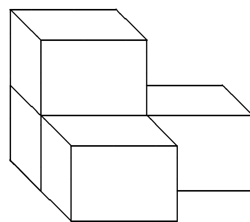


图 6

2.6 小结与作业

让学生小结所学内容, 并布置作业: 画棱柱、棱锥、棱台的三视图.

3. 教学反思

课程标准指出"注重信息技术与数学课程的整合", 要求"高中数学课程应提倡利用信息技术来呈现以往教学中难以呈现的课程内容". 本节课遵循此理念, 借助多媒体计算机进行教学, 充分发挥信息技术的优势, 将文本、图形、视频等多种媒体集于一身进行信息加工处理, 呈现方式丰富, 改善了认知环境. 例如, 组合体的形成过程用动画演示, 激发了学生的学习热情. 另外色差、闪烁等技术很好地突出重点、难点, 使学生易于理解, 便于记忆.

课程标准又要求"高中数学课程提倡体现数学的文化价值". 本节课在教学中适当渗透数学文化, 让学生了解数学在其他学科(美术)的应用, 激发学生对数学的兴趣, 符合新课标的理念.

谈实现二次函数"升级"的初高中教学衔接

317525 浙江省温岭市大溪二中 张菊平 浙江省温岭市大溪中学 郑云初

二次函数作为一种简单而基本的函数类型, 是初高中数学内容中联系最密切的内容. 在初中阶段, 学生研究的函数以二次函数为重点, 师生重视, 掌握得较好; 在高中阶段, 二次函数除在二次不等式部分略有涉及外, 已不再单列, 更多的是穿插在其它内容中. 这样学生从初中到高中, 容易产生脱节现象, 主要是初高中二次函数的学习虽有共同点, 但更多的是不同点, 学生未及时适应变化, 已形成的思维定势不能消除. 本文拟从初高中二次函数的差别入手, 谈如何实施衔接, 发挥二次函数的教学价值.

1. 二次函数在初高中学习中的主要差别

1.1 粗放 → 精细; 两个"二次" → 三个"二次"

虽然二次函数是初中阶段学习的重要内容, 但大纲对二次函数教学要求较低, 只要求理解二次函数和抛物线的有关概念, 会用描点法画图象, 会用配方法确定抛物线的顶点和对称轴, 会用待定系数法求解析式, 理解一元二次方程与二次函数的关系, 是最基础性的知识, 属于粗放型. 到了高中, 函数定义建立在集合基础上, 以映射来描述, 研究的对象、内容、方法大大扩展, 与二次函数有关的问题更涉及到高中数学的方方面面. 首先出现的一元二次不等式、充要条件, 就与二次函数有着密不可分的联系. 从初中的二次方程、二次函数的"二人转", 到高中的二次方程、二次函数、二次不等式"三位一体", 贯穿整个高中数学教学的始终. 三个二次中, 二次不等式为新内容, 三者优势互补, 但以二次函数为核心. 教学中这时应适当巩固、加深、拓宽二次函数, 除掌握书本罗列的三者关系外, 以具体问题为依托将有关知识从粗放型向精细型过渡, 让学生接触常见的诸如二次方程根的区间分布与二次函数关系的有关类型及结论.

例1 若方程$x^2+(2m-1)x+4-2m=0$的两根为α、β, 且$\alpha<2<\beta$, 求m的范围.

方法一: 根据二次方程根与系数关系有$\alpha+\beta=1-2m$, $\alpha\beta=4-2m$, 由$\alpha<2<\beta$得$\alpha-2<0$且$\beta-2>0$.

原题等价于 $\begin{cases}\Delta>0,\\(\alpha-2)(\beta-2)<0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\Delta=4m^2+4m-15>0,\\\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=2m+6<0.\end{cases}$

方法二: 二次方程的根即为相应二次函数与x轴交点横坐标, 由$\alpha<2<\beta$, 画出$y=x^2+(2m-1)x+4-2m$的大致图象(图1).

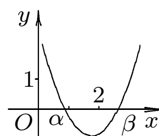


图 1

原题等价于 $\begin{cases}\Delta=4m^2+4m-15>0,\\f(2)=2m+6<0.\end{cases}$

方法一利用根与系数关系进行等价转化, 方法二根据方程与函数关系进行数与形的等价转化. 将问题一般化, 用两种方法均可以得到$ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$一个根比m大, 一个根比m小的等价条件, 将问题进一步深化细化, 如果两根α、β满足$\alpha<n<m<\beta$, 则方法二更有优势. 在三个"二次"中, 有许多这样的问题, 可以以探究性方式开展学习.

1.2 整体 → 局部; 静态 → 动态

初中学习的二次函数, 定义域为全体实数, 是整体的, 系数一般不含参数, 是静态的; 而

高中二次函数的研究, 具有动态特征. 这两大区别, 大大丰富了二次函数的内涵. 大部分题目“以旧瓶装新酒”, 在学生所熟悉的“面孔”下, 有更新、更深的内容. 若学生仍以老眼光审视问题, 必将难以入手. 因此, 这两大区别必须衔接好.

在函数的定义、两域(定义域、值域)两性(单调性、奇偶性)一图(图象)的教学中, 例如在进行函数单调性与奇偶性的教学过程中, 可研究这样一道题: 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$. (1) 讨论它的单调性, 求单调区间, 并证明; (2) 讨论它的奇偶性, 指出它何时为偶函数, 并证明之. 让学生从新的角度去认识旧知识. 又如对什么样的函数有反函数, 学生难以理解, 这时就可用大家非常熟悉的二次函数为对象, 去探索领会: 并非所有函数都有反函数, 适当增加条件后, 有些函数才有反函数, 再归纳出反函数存在的条件. 于是, 当学生对具体函数的研究方法形成一定系统、有一定基础后, 应乘机使学生对二次函数有一个更深层次的认识, 重点应放在动态、局部这两方面.

例2　已知 $f(x)=-x^2-2x+2$, 分别求在闭区间 (1) $[-4,-2]$; (2) $[2,3]$; (3) $[-2,3]$ 上的最大值 M 与最小值 m.

解略.

例3　已知函数 $f(x)=x^2+ax+3$, $x\in[-1,1]$, 最小值为 -3, 求实数 a.

分析: $f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+3-\dfrac{a^2}{4}$ 开口向上, 但自变量 x 有限制, 是 $[-1,1]$ 上的一段, 并非整个图象, 且对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}$ 变动, 图象在 $[-1,1]$ 上随对称轴的变化而变化, 这样, 必须将对称轴与给定区间的相对位置进行讨论, 结合图象, 分对称轴在区间右侧、左侧、在区间内三大类, 若已知的是最大值, 则还要对对称轴在区间内的情况与区间中点比较再分类(解略).

例4　设 $f(x)=x^2-2x-1$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最小值为 $g(t)$. 求 $g(t)$ 并画出 $g(t)$ 的图象.

分析: 这里函数解析式已定, 但问题并非在全体实数集上, 而是在一个含有参数的闭区间上考察最小值, 这就要结合区间与对称轴的相对位置来进行定位讨论(如图2、3、4).

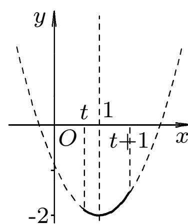


图 2

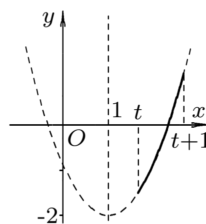


图 3

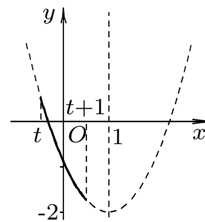


图 4

解: $f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$, 对称轴 $x=1$.

(1) 当 $x=1\in[t,t+1]$, 即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $g(t)=-2$;

(2) 当 $x=1<t$ 时, 对称轴在区间左侧, $f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上递增, $g(t)=f(t)=t^2-2t-1$;

(3) 当 $x=1>t+1$ 即 $t<0$ 时, 对称轴在区间右侧, $f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上递减, $g(t)=f(t+1)=t^2-2$.

$$g(t)=\begin{cases} t^2-2 & (t<0),\\ -2 & (0\leqslant t\leqslant 1),\\ t^2-2t-1 & (t>1). \end{cases}$$

$g(t)$ 图略.

上述三例均为二次函数在闭区间上的最值问题, 通过这类例子, 使学生对二次函数的图象性质有深刻理解, 并在此基础上掌握基本类型, 基本方法, 巩固高于初中的认识.

认识一: 一个二次函数在 $\mathbf{R}$ 上或者只有最小值, 或者只有最大值, 但当定义域发生变化时, 取最值情况就会发生变化, 在闭区间上必有最大值和最小值.

认识二: 必须结合图象, 以性质进行分析, 没有图象依托, 问题难以切入.

认识三: 对于二次函数在闭区间上的最值问题, 多为轴动区间定, 或轴定区间动两种类型. 不论何种类型, 都要讨论对称轴与区间相对位置, 即轴在区间左侧、右侧、内部. 对称轴在闭区间内有时还要再分在左半部分还是在右半部分. 必须让学生搞懂, 为什么要这么分类, 最好能让学生自己说出来. 在区间上求二次函数最值, 主要是利用函数单调性来解决, 而二次函数的单调性是以对称轴为界来划分的, 且在与对称轴距离相等的点处, 其对应的函数值相等. 只有把为什么这样分类搞清, 学生才会真正理解掌握轴动区间也动的情况.

对二次函数在闭区间上求值域(最值)问题, 要注意结合图形, 题前分析, 规范书写, 题后小结, 才能更有效益.

1.3 显性 → 隐性; 单纯 → 复合(整合)

初中二次函数问题, 大多直接指向二次函数本身的相关问题, 有着显性、单纯的特征; 而高中阶段, 教材在暗处用后继知识不断深化对二次函数的认识和运用. 问题往往要通过适当的变形转化等途径, 转化为二次函数问题, 具有隐性、复合(整合)的特征 (关于复合函数, 教材在高一、二避开名称, 高三导数部分出现名称, 但在高一、高二存在函数复合现象, 其中许多是与二次函数有关的复合, 通过换元法, 可较好解决复合问题).

例5 求函数值域:

(1) $y=2x-1+\sqrt{13-4x}$;

(2) $y=\cos 2x+\sin x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$.

分析: (1) $\sqrt{13-4x}$ 是二次根式, 被开方数为一次式, 相当于一次式的“$\frac{1}{2}$次”, 则一次式 $2x-1$ 可化为此根式的“2次”, 问题可转化为二次函数问题. 令 $t=\sqrt{13-4x}$ 则 $x=\dfrac{13-t^2}{4}$ 且 $t\geqslant 0$, 即求 $y=2\times\dfrac{13-t^2}{4}-1+t=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{11}{2}$ 在 $t\geqslant 0$ 时的值域.

(2) 略.

例6 (2002年高考题) 设 a 为实数, 函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1, x\in\mathbf{R}$. 求 $f(x)$ 的最小值.

分析: $f(x)$ 不是二次函数, 式中含有绝对值运算, 但去掉绝对值符号, $f(x)$ 是由两个二次函数整合而成的一个分段函数,

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+a+1 & (x\leqslant a),\\ x^2+x-a+1 & (x>a).\end{cases}$$

这样就把问题转化到二次函数在区间上求最值问题来解决(解略).

1.4 集中 → 分散; 主干 → 工具(载体)

初中二次函数内容集中, 作为主干知识来学习; 高中二次函数内容分散在各个部分, 作为工具或载体来体现其价值. 教材中如等差数列求和公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$, 就可变形为关于 n 的二次函数 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2-\left(\dfrac{d}{2}-a_1\right)n$, 与等差数列求和有关的问题可借助二次函数来解决; 三次函数的导数为二次函数, 利用二次函数可研究三次函数图象性质; 再如总体正态分布密度函数的图象性质就可利用二次函数的性质来理解分析.

2. 高中二次函数教学的几个注意点

2.1 落实基础知识, 掌握基本技能, 体会思想方法

例如对于函数解析式的三种表达式、对称轴、顶点、单调区间、图象、平移、二次不等式、二次方程等知识, 学生应形成一个知识网络结构, 运用时能快速准确呈现. 如果二次函数配方错误, 或不能画出符合要求的大致图象, 则运用二次函数解决问题就是一句空话; 高中二次函数问题, 无一例外地涉及到函数与方程、函数与不等式、配方法、换元法、分类讨论、数形结合、等价转化等重要数学思想方法, 因此, 还必须进行适量的练习.

2.2 集中分散, 穿插结合, 循序渐进, 逐步深入

在集合中的一元二次不等式, 充要条件部分, 高一函数, 高二不等式部分, 高三第一轮复习, 适宜根据学生实际对二次函数进行相对集

在高中数学新教材“空白处”留一点“精彩”

312000 浙江省绍兴鲁迅中学 章显联

问题的提出: 《全日制普通高级中学教科书(实验修订本)数学》在每页约三分之一的地方除编者注的少量说明、图形和数学家介绍外都还留有空白处. 编者的意图是否可这样理解: 一方面希望学生能插上想象的翅膀, 留一些注记, 另一方面教师可将一些“教学反思”注在相应的空白处. 但现状令人堪忧, 据笔者调查, 发现不少同学在教材空白处用于打草稿或用于画漫画. 当然更多的是一个字都没有写; 而教师手头的新教材空白处也是基本空白.这引起了笔者的深思. 如何在空白处留一点“精彩”呢?

一、指导学生给教材空白处留一点“精彩”

善于读书的人总是边读边勾画边在空白处留一点“精彩”, 如心得、补充内容等. 它可以帮助学生形成实事求是的工作作风, 能克服读书时眼到心不到的弊端. 它也是一种重要的学习方法, 通过它可帮助学生弄懂一本书, 经历从薄到厚, 再从厚到薄的学习过程, 并能帮助学生找出不足并弥补.

1. 利用“空白”写一点对教材的理解

高中数学许多概念、定理、公式都是以简洁的语言给出, 而数学本身具有抽象性, 理解起来有一定的困难, 可在教师指导下, 将一些体会写在书中恰当的位置作备忘.

例1 在立体几何内容中有这样一句话:斜线和平面所成的角, 是这条斜线和这个平面内的直线所成的一切角中最小的.

为了深刻理解这个定理, 可在空白处这样注解:

(1) 证明(略);

(2) 这条斜线和这个平面内的所有直线所成的角中最大值是90°;

(3) 该斜线与平面所成的角为θ_1, 斜线的射影与平面内的直线所成的角为θ_2, 斜线与平面内直线所成的角为θ, 则$\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos\theta$.

例2 等比数列前n项和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

可在空白处写上:

(1) $q=1$时, $S_n=na_1$特殊情况应注意, 如求$S_n=a+a^2+a^3+\cdots+a^n\ (a\neq 0)$,

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a(1-a^n)}{1-a} & (a\neq 1),\\ n & (a=1);\end{cases}$$

(2) 公式的推导方法(多种方法)特别要掌握错位相减法;

(3) S_n是关于n的指数函数$S(n)=Aq^n-A\,(A\neq 1)$.

~~~~~~

中的教学, 在其它教学时段, 宜根据实际情况穿插. 由于与二次函数有关的问题大多综合性强, 切忌一步到位, 运用时要重图形, 多变式, 循序渐进, 逐步深入.

2.3 着力提升学生的思维层次

从思维发展特征看, 初中学生处在形象思维为主, 逐步向经验型的抽象思维过渡阶段, 而高中学生处在以经验型为主的抽象思维向理论型抽象思维过渡, 并初步形成辩证思维阶段. 通过二次函数的再学习, 使学生认识到同样的二次函数问题, 到了高中必须从更深的层次、更广的角度, 以更严密的推理、更灵活的方法去分析、解决.

综上所述, 二次函数无论从呈现方式、教学要求、思维方法, 初高中都已发生了大的变化. 教师应站在整个系统的高度, 做好教学衔接, 逐步实现二次函数平稳、顺利地“升级”与“升值”.
~~~~~~

例3　圆锥曲线第一、第二定义具有举足轻重的作用，那么这两者是否有联系呢?

可在推导椭圆标准方程旁空白处写上由 $a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 得 $\dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{a^2}{c}\right|}=\dfrac{c}{a}$,故第一、第二定义是统一的. 类似双曲线也可在空白处说明. 再如椭圆第一定义可在空白处写上"要注明商标 $2a>2c$, 谨防假冒". 若 $2a=2c$, 则动点 P 的轨迹为线段, 若 $2a<2c$, 则点 P 的轨迹不存在. 抛物线定义中写上 $F\notin l$, 若 $F\in l$, 则满足条件中的点轨迹是过 F 且垂直于 l 的一条直线等.

2 利用"空白"写一点在寻求联系与区别的过程中所得到的重要结论

数学各章节的内容既有区别又有联系, 若能在比较中学习, 善于寻找, 分析新旧知识间的区别与联系, 挖掘共性, 分离个性, 则往往事半功倍.

例4　在平面几何中, 对于三条直线 a、b、c 存在下面三个重要命题 $\left.\begin{array}{c}a/\!/c\\ b/\!/c\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b$; $\left.\begin{array}{c}a\perp c\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Longrightarrow b\perp c$; $\left.\begin{array}{c}a\perp c\\ a\perp c\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b$.

它们都是真命题, 若把 a、b、c 换成 (i) 不在同一平面内的三条直线, (ii) 三个平面 α、β、γ, (iii) 其中两条直线换成两个平面, 另一条还是直线或 (iv) 其中一条直线换成平面, 另两条还是直线. 一共可得到16个不同的命题, 其中相当多的命题是正确的,也有许多是假命题,将正确命题写在"空白"处, 作为规律对解题大有益处.

3. 利用"空白"写一点"错解"后的反思

面对错解, 每个人因不同的学习状况和学习习惯会作出不同的反应, 殊不知正是这种反应在很大程度决定了你下一轮学习的成功或失败. 因此我们要重视错解深处有亮色——错解暴露了你学习上的不足和弱点, 然后进行正确归因. 根据找到的"原因", 制定具体的改进方案.

例5　求过点 $P(2,3)$ 并且在两轴上的截距相等的直线方程.

错解: 设直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$, 把 $(2,3)$ 代入得 $a=5$,

∴ 所求直线方程为 $x+y-5=0$.

错因: 没有注意到截距式使用条件 $a\neq0$ 且 $b\neq0$, 故所求直线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$. 总之, 在使用直线方程的斜截式、两点式、截距式和点斜式时, 应注意它们各自的适用范围.

将以上错解, 错因写在空白处, 还可举几道类似问题, 以便今后能引起重视.

4. 利用"空白"写一点对研究性学习内容的体会和理解

新教材中有许多研究性学习课题与实习作业, 近几年出现的以研究性学习为背景的高考试题, 以及可以把自己参加研究和实践的经验与心得, 及时记录下并写在适当的"空白"处, 则对提高自己的数学应用水平, 培养创新精神及实践能力有着深远的作用. 但应注意坚持不懈反复提炼.

二、教师利用教材"空白"写点"教学反思"

1. 利用"空白"写一点通过教学实践和理论学习对新课程的理解和体会

新课程提倡教师要成为课程改革的主体参与者, 因此, 作为教师应改变以往学科本位论的观念和消极被动执行的做法.

例6　在新教材的各章中只有第九章是按不同的内容要求编写的, 由此, 第二册(下)A和第二册(下)B之分, 是选用A本还是选用B本, 就成了教育部门研究的问题之一, 如何利用A本和B本, 就成了教师研究的问题之一.

通过近一年的教学实践和理论学习, 我将教学安排的构想写在相应"空白"之处:

(1) 以A本内容为主, 强化空间想象能力;

(2) 为了体现新方法、新思想, 为了强化向量在判断直线与直线平行、垂直、在角、距离度量上的优势, 在使用A本的基础上, 适当补充B本"空间向量"的有关内容, 但补充内容不宜超过课本的要求.

2. 利用“空白”及时记录数学课堂教学中的“问题”资源

课堂教学资源的利用有多个着力点, 其中课堂教学的“问题”资源是不可忽视的资源, 这里的“问题”指的是学生提出的问题, 课堂中的突发事件, 学生的“错误”以及教师有意或无意的错误, 若能在课后及时记录下来, 并加以分析, 无疑是笔宝贵的财富.

例7　求$y=|x-1|+|x-2|$的最小值.

这是我在上节解绝对值不等式一堂课中的一道例题. 大部分学生的思考方法是利用分类讨论思想, 去绝对值求得$|x-1|+|x-2|$的最小值1, 我给出的方法是作函数$y=|x-1|+|x-2|$的图象, 结合图象直观性, 从而求得$y_{\min}=1$. 正在我鸣金收兵时, 半路杀出了程咬金, 说还有更简单的方法, 利用$|x-1|$、$|x-2|$绝对值的几何意义, 求得$y_{\min}=1$. 课后及时将此种方法记在课本空白处. 后来几年此种方法多次被同学们应用到对一些较难题目的思考上.

3. 利用“空白”及时记录课堂教学效果

课堂的引入, 定理、例题、习题的分析, 课堂的结尾是不是达到了预期教学效果? 学生的行为等是不是产生了预期的变化? 可及时记录下来, 写在相应的空白处.

例8　对于均值不等式: 若a、b是正实数, 则$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当$a=b$时取“=”号).

课本上采用的证明方法是利用不等式: 若a、$b\in\mathbf{R}$, 则$a^2+b^2\geqslant 2ab$, ①

当且仅当$a=b$时取等号. 用代换方法证明.

我引导学生用下面方法证明: ① 式两边加上$2ab$得$a^2+b^2+2ab\geqslant 4ab$, $\therefore$ $(a+b)^2\geqslant 4ab$, 当a、$b\in\mathbf{R}^+$时, 有$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(当且仅当$a=b$时“=”号成立). 我引导学生既然 ① 式两边同时加上 ① 的右边式子, 而这式子本身是有对称性的, 为何不两边同时加上 ① 式左边的式子呢? 你会得到什么样的结论? 学生思考后得到$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab$, 即$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$. 这样的课堂设计, 表面上增加了学生的负担, 但实际上恰恰相反, 因为学生得到了下面一幅美丽的图画:

① 式两端各加上 ① 式左边, ① 式两端各加上 ① 式右边, 分别得

$$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b),\ (a、b\in\mathbf{R}^+),\quad ②$$

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ (a、b\in\mathbf{R}^+),\quad ③$$

于是我把这幅图画及时记录在“空白”处, 而公式② 在不等式证明中多次被用到, 如求证$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

以上是我指导学生在“空白”处留一点“精彩”和我本人在“空白”处留一点“反思”的体会和做法, 供同学和老师参考.

参考资料

孙维刚. 孙维刚导学高中教学. 教育科学出版社.

章显联. 让学生在“教学交流中”学习. 数学教学. 2004. 5.

(上接第6–38页)

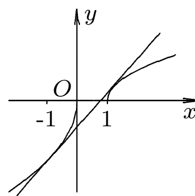


图 8

其几何意义为点$A(t^2+1,t)$与点$B(-\lambda^2,-2\lambda)$连线的斜率, 如图8, 点A在曲线$y^2=x-1$ $(y\geqslant 0)$上, 点B在曲线$y^2=-4x$ $(y\leqslant 0)$上. 因此, y最大值为两曲线公切线的斜率, 求得其值为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 即y最大值为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

余味: 数形结合, 关键是如何切入图象, 当然其中代数变形的换元转化技巧也是十分必要的.

解决代数问题, 需要用图意识, 更需要把握图的切入点. 从不同角度去探索图形在解题中的应用, 培养学生的探究能力, 也是新课标的要求.

网络探究的初中研究性学习实验案例一则

325000 浙江省温州市第十七中学 林合军

案例背景:

笔者曾在2003年度温州市电教年会上开过一节示范课, 要求是在网络环境下真正意义的信息技术整合课, 学生每人一机, 利用网络自主探究, 合作学习. 考虑到初二学生当时仍使用浙江老教材的具体实际, 为体现新课改精神, 笔者选择了初中数学"基于双等边三角形的图形探究"为主题, 利用几何画板及FRONT-PAGE等工具, 制作了利于学生自主探究评价的主题性学习网站, 精心设计与之配套的实验报告单, 便于思维拓广及元认知能力培养.

案例描述:

一、准备: 教师预先发给每位学生每人一张实验报告单, 要求每人上网到固定网址自主探究, 同桌两人协作, 共同完成实验报告, 进行自我评价.

二、课堂:

• 问题一 猜一猜: A、B、C三座城市在一条直线上, A、B、D三座城市之间距离相等, A、C、E三座城市之间距离也相等. 已有公路AB、AD、BD、AC、AE、EC六条, 现在经济发展需要, 要再建设两条高速公路BE、CD, 猜猜BE、CD之间有什么关系?

由于直观, 学生回答惊人一致: 相等!

量一量: 如图1, 请按图中按钮, 显示电脑对BE、CD长度的测量. 电脑立时显示长度数据, 学生很兴奋! 突然, 有个细心的学生发现: 电脑显示的数据与实际不一样! 怎么回事? 经过探讨, 大家明白了电脑上显示的是像素, 不同于数学中厘米等, 但不影响所得结论.

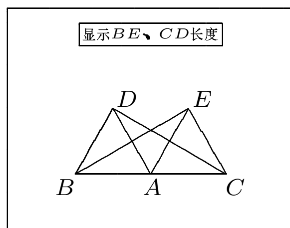


图 1

动一动: 拖动点A、点B、点C其中之一, 变化图形并观察图形, 注意BE、CD长度之间关系.

记下你得到的结果. 学生任意拖五个位置, 电脑实时给出数据, 学生感到新奇, 在试验报告单的对应表格记下得到五组数据结果. 小组分工合作一度出现混乱, 老师指导.

想一想: 你得出结论了吗?

1. 请运用我们学过的数学知识思考上述结论.

2. 若感觉困难, 可按图中按钮, 希望有所提示.

如图2, 对两个阴影三角形进行探究. 同组的伙伴们互相交流一下实验结果, 由于本题简单, 结论很容易下, 也是一致!

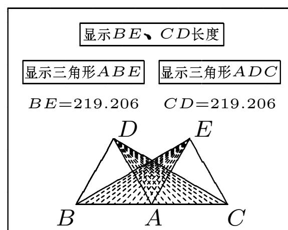


图 2

变一变: 如图3, 若点A不是BC上的点, 你刚才的结论还成立吗?

1. 试验得出结论.

2. 运用我们学过的数学知识思考上述结论.

3. 请按图中按钮, 希望有所提示.

如图4, 对两个阴影三角形进行探究. 在简

单题目下,学生初次经历自主探究小组合作体验,教师及时抛出新的难题,激发学生兴趣!

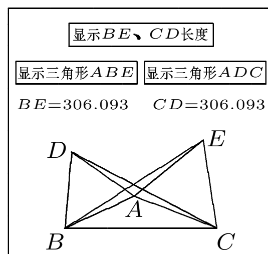


图 3

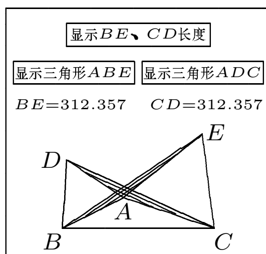


图 4

• 问题二　如图5, BE与AD交于点G, CD与AE交于点H, 请你猜猜, $\triangle AGH$具有什么特征?

• 问题三　如图6, 点M是BE中点, 点N是CD中点, 请你猜猜, $\triangle AMN$具有什么特征?

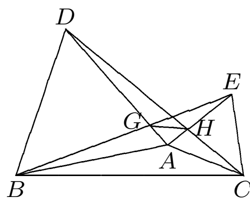


图 5

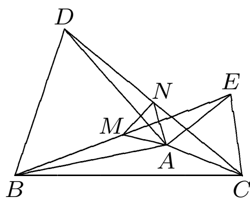


图 6

模仿问题一的一系列探究过程, 学生分别对问题二和问题三自主探究, 合作交流, 发现问题二在"点A在BC上"条件丧失下不完全具有相同的结果! 而在问题三的探索中, 不少同学发现电脑给出的两条线段在某些时刻存在细微的不同, 比如仅最后的一位数字不同, 是什么原因呢? 从而进一步激发学生利用所学过的几何知识去解释!

三、知识点查询: 在分析试验结果时, 学生必然要用到几何证明, 本节课的有关的数学知识点, 可以按电脑左上角按钮查询. 如图7、8所示:

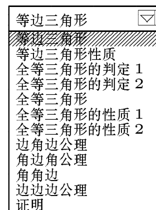


图 7

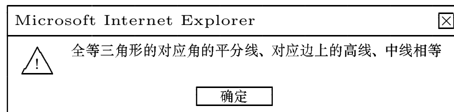


图 8

经过小组讨论、全班讨论及老师引导分析, 大家确定电脑是对线段进行了测量, 误差是允许的. 至于证明问题三, 这原是个竞赛难题, 经过大家探究分析, 可以与问题一、二一样先证明$\triangle BAE \cong \triangle DAC$, 得到$BE = DC$, 再证明$\triangle BAM \cong \triangle DAN$. 此时全班同学情绪激扬, 教师引导学生评价小结.

四、效果评价: 学生先自行进入网上试场, 进行独自考评, 计算机将立即反馈.

附录: 实验报告单

组员:______________________.

日期:____月_____日.

问题一

实验目的

如图1所示, A是线段BC上一点, $\triangle ABD$与$\triangle AEC$是等边三角形, 请确定CD与BE长度关系!

实验步骤

1. 利用电脑对BE、CD长度的测量.

2. 拖动点A、点B、点C其中之一, 变化并观察图形, 注意BE、CD长度之间关系.

3. 任意挑五个位置, 在表中记下你得到的结果(表略).

实验结果

1. 你得出的结果是________.

你是不是很好奇, 那就请再试一试! 这次是一样的吗?

2. (1) 请你和同组的伙伴们互相交流一下实验结果,一起探讨其中的奥秘. (2) 从实验中, 我们发现________________. (3) 你们能用数学知识证明吗(选做)?

问题一的变化

实验目的

如图3所示, A不再是线段BC上一点, $\triangle ABD$与$\triangle AEC$是等边三角形, 你刚才的结论还成立吗?

“希望”、“期望”和“概率”

——由一道争鸣问题引发的思考

052360 河北省辛集市第一中学 李 辉

1. 问题的提出

某刊曾刊出过这样的一个问题: “两名战士在一次射击比赛中,战士甲得1分、2分、10分的概率分别是0.4、0.4、0.2; 战士乙得1分、2分、3分的概率分别是0.1、0.6、0.3, 那么两名战士得胜希望大的是__________ (由于原题的计算有误, 所以笔者对原题做了数据上的改动, 以下称问题[1]).”

原文从两个不同角度给出两种解法, 第一种解法是分别求出了战士甲得分的期望和乙得分的期望, 结果是甲得分的期望值大于乙得分的期望值, 于是得出结论“甲获胜的希望大”. 另一种解法是分别计算出了甲得胜的概率和乙得胜的概率, 结果甲得胜的概率小于乙得胜的概率, 于是得出和第一种方法完全不同的结论“乙得胜的希望大”. 哪种解法是正确的呢? 要回答上述问题首先要弄清与之有关的几个基本概念.

2. 需搞清的几个基本概念及问题的结论

希望与期望: 希望一词在现代汉语词典中是这样解释的: 心里想着达到某种目的或出现某种情况. 而概率统计中的期望是“数学期望”,

~~~~~~

实验步骤

1. 利用电脑对BE、CD长度的测量.

2. 拖动点A、点B、点C其中之一, 变化并观察图形, 注意BE、CD长度之间关系.

3. 点A在线段BC上方, 任意挑选三个位置; 点A在线段BC下方, 任意挑三个位置, 在表中记下你得到结果(表略).

实验结果

1. 你得出的结果是________.

你是不是很好奇, 那就请再试一试! 这次是一样吗?

2. (1) 请你和同组的伙伴们互相交流一下实验结果, 一起探讨其中的奥秘. (2) 从实验中, 我们发现______________________. (3) 你能用数学知识证明吗(选做)?

问题二、三

实验报告单与上面类似, 略.

请对本节课进行自我评价(优秀、良好、一般、差):

1. 小组合作学习:____.

2. 数学知识:____.

3. 电脑技能:____.

4. 数学感悟:____.

家庭作业:

知识迁移: 将等边三角形改为正方形.

如图9, 若四边形$ABED$、$ACGF$都是正方形, 将正方形$ACGF$绕A点旋转, 则在旋转过程中, BF与CD的大小关系为 ············( )

(A) $BF = CD$; (B) $BF > CD$;

(C) $BF < CD$; (D) 无法确定.

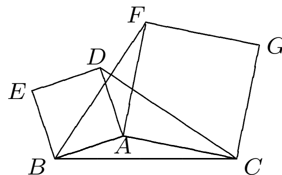


图 9

注: 以上内容已经做成网页学件, 利于学生不拘时自主学习, 希全国各地学生交流, 共同提高.

http://www.shuitou.cn/1226

课后反思: (略).
~~~~~~

“它反映了离散型随机变量取值的平均水平.”对比几个概念不难看出, “希望”并非数学中的“期望”. 且问题[1]中两战士的胜负取决于双方得分的比较, 只要甲得分比乙得分高就获胜, 否则就不能获胜, 而本身得分的高低并不是胜负的充要条件, 所以两者胜负与得分的平均取值无关, 即与数学期望无关.因此“得胜的希望”显然是指“得胜”这一事件发生的可能性的大小, 即求这一事件发生的概率. 由此可知, 问题[1]中的解法二是正确的.

3. 由问题引发的思考

双方的胜负就一定与“期望”无关吗? 我们来看问题[1]的变式: 两名战士在一次射击比赛中, 战士甲每枪得1分、2分、10分的概率分别是0.4、0.4、0.2. 战士乙每枪得1分、2分、3分的概率分别是0.1、0.6、0.3. 现规定每名战士各打3枪, 以总分多者为胜. 则得胜希望大的是__________.

我们不妨也从两个方面加以比较.

解: 设甲得分记为随机变量ξ, 乙得分记为随机变量η.

则随机变量ξ的分布列为:

三枪均得1分时,

$P(\xi=3)=0.4^3=0.064$;

三枪均得2分时,

$P(\xi=6)=0.4^3=0.064$;

三枪均得10分时,

$P(\xi=30)=0.2^3=0.008$;

三枪中有两枪得1分, 一枪得2分时,

$P(\xi=4)=C_3^1\times0.4^2\times0.4=0.192$;

三枪中有两枪得1分, 一枪得10分时,

$P(\xi=12)=C_3^1\times0.4^2\times0.2=0.096$;

三枪中有两枪得2分, 一枪得1分时,

$P(\xi=5)=C_3^1\times0.4^2\times0.4=0.192$;

三枪中有两枪得2分, 一枪得10分时,

$P(\xi=14)=C_3^1\times0.4^2\times0.2=0.096$;

三枪中有两枪得10分, 一枪得1分时,

$P(\xi=21)=C_3^1\times0.2^2\times0.4=0.048$;

三枪中有两枪得10分, 一枪得2分时,

$P(\xi=22)=C_3^1\times0.4\times0.2^2=0.048$;

三枪中有一枪得1分, 一枪得2分, 一枪得10分时,

$P(\xi=13)=A_3^3\times0.4\times0.4\times0.2=0.192$.

则

ξ	3	4	5	6	12	13	14	21	22	30
P	0.064	0.192	0.192	0.064	0.096	0.192	0.096	0.048	0.048	0.008

又 $E\xi=3(1\times0.4+2\times0.4+10\times0.2)=3\times3.2=9.6$.

同理, 随机变量η的分布列为:

η	3	4	5	6	7	8	9
P	0.001	0.018	0.117	0.324	0.351	0.162	0.027

$E\eta=6.6$.

显然有$E\xi>E\eta$.

另一方面, 从概率的角度来看, 记甲战胜乙$=A$, 乙战胜甲$=B$, 甲、乙战成平手$=C$. 事件A可分为“甲得4分乙得3分、甲得5分乙得3分或4分, 甲得6分乙得3分、4分或5分, 甲得12、13、14、21、22、30分”, 故$P(A)=0.192\times0.001+0.192\times(0.001+0.018)+0.064\times(0.001+0.018+0.117)+0.096+0.192+0.096+0.048+0.048+0.008=0.500544>0.5$.

显然$P(A)>P(B)$, 即甲战胜乙的希望大于乙战胜甲的希望.

在这个问题中, 甲乙的胜负取决于3次射击得分的总和, 显然射击的次数越多, 得分总和就越接近其期望值. 因此,期望值高的一方获胜的概率就大.

那么为什么在问题[1]中会出现期望值高而获胜的希望小的情形呢? 我们知道, 期望是“随机变量取值的平均数”, 是衡量一个射手射击水平的一个重要指标. 但也只是“从一个方面反映了射手的射击水平”而已, 而不是唯一的指标. 衡量技术水平的另外一个重要指标就是“方差”或“标准差”. 方差“反映了一个随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度”, 也就能够反映一个射手技术的稳定性. 我们来看问题[1]中甲、乙两战士得分的方差.

记战士甲在这次比赛中的得分数为随机变量ξ, 战士乙的得分数为随机变量η. 则

$E\xi=1\times0.4+2\times0.4+10\times0.2=3.2$,

所以ξ的方差为$D\xi=(1-3.2)^2\times0.4+$

(下转第6–48页)

关于数列的通项公式的探究

311800 浙江省诸暨市天马实验学校 金 兔 311814 浙江省诸暨市湄池中学 陈 浩

对于数列的通项公式, 教材是这样定义的: 如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与n之间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的通项公式. 数列的通项公式是数列的基础知识, 是数列教学的重要内容. 本文对数列的通项公式的教学提出如下两点补充意见.

一、关于数列有没有通项公式的补充

课本上出现的数列大多都可以用通项公式表示, 但也有许多数列不能用通项公式表示. 换言之, 许多数列没有通项公式.

这话本身不错. 但笔者发现, 在具体的教学实践中, 其意思经常变味.

如全日制试用教材第一册(上)第106页引例: 从1984年到2000年, 我国体育健儿共参加了五次奥运会, 获得的金牌数排成一列数: 15, 5, 16, 16, 28. 说出由此给出的我国体育健儿在奥运会取得金牌数这一数列的通项公式有一定的难度, 许多人认为它没有通项公式. 那么能否写出一个数列的通项公式, 使其前五项恰好是上述五个数字呢?

为了解决这个问题, 我们先证明下面的定理.

定理1 若数列$\{a_n\}$有$m\,(m\in\mathbf{N}^*)$项为$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$, 则该数列有多项式型通项公式.

证明: 设$a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_{m-1}n^{m-1}$, 则根据题意得

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1} = a_1, \\ x_0 + x_1\cdot 2 + \cdots + x_{m-1}\cdot 2^{m-1} = a_2, \\ x_0 + x_1\cdot 3 + \cdots + x_{m-1}\cdot 3^{m-1} = a_3, \\ \cdots\cdots \\ x_0 + x_1\cdot m + \cdots + x_{m-1}\cdot m^{m-1} = a_m, \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{m-1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \cdots & m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

由于范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{m-1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \cdots & m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$ 所以矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{m-1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \cdots & m^{m-1} \end{pmatrix}$$ 可逆, 设其逆

矩阵为 $$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

则得

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

$\therefore x_{i-1} = a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + \cdots + a_{im}a_m\,(i = 1, 2, 3, \cdots, m)$, 可见$x_i$由$a_1, a_2, a_3, \cdots,$

a_m 确定, 即 $a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_{m-1} n^{m-1}$ 由 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$ 确定.

所以, 数列 $\{a_n\}$ 有 $m\,(m \in \mathbf{N}^*)$ 项 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$, 则该数列有多项式型通项公式.

上例中, $a_n = \frac{55}{24}n^4 - \frac{113}{4}n^3 + \frac{2945}{24}n^2 - \frac{859}{4}n + 133$ 就是数列15, 5, 16, 16, 28的一个通项公式.

而且, 我们还可以把通项公式作进一步的推广, 可推广成为: $a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_{m-1} n^{m-1} + k n^{\alpha}(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m)\,(k、\alpha \in \mathbf{R})$,

可见, 这无数多个(随着 k、α 的变化)都是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

如果考虑对数函数, 则有 $a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_{m-1} x^{m-1} + \log_a[k n^2 (n-1)(n-2)\cdots(n-m) + 1]\,(k > 0, a > 0 且 a \neq 1)$.

如果结合三角函数, 上述数列 $\{a_n\}$ 还可以有形如 $a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_{m-1} n^{m-1} + k \sin[(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m)]\,(k \in \mathbf{R})$ 和 $a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_{m-1} n^{m-1} + k \tan[(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m)]\,(k \in \mathbf{R})$ 等的通项公式.

从而我们又有

定理2　若数列 $\{a_n\}$ 前 m 项为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$, 则该数列有无穷多个通项公式.

所以数列15, 5, 16, 16, 28也可写出无穷多个通项公式.

由上述定理可知, 有穷数列一定有通项公式而且有无穷多个通项公式. 所以在教学时, 我们如果要举没有通项公式的例子, 只能从无穷数列方面去考虑, 否则就出错了.

二、关于有的数列的通项公式不止一个的补充

与全日制试用教材第一册(上)配套的教学参考书第70页上有这样一段话: 一些数列的通项公式可以有不同的形式. 例如, 数列 $-1, 1, -1, 1, \cdots$, 的通项公式可写成 $a_n = (-1)^n$, 也可写成 $a_n = \begin{cases} -1, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 1, & n = 2k, \quad k \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$ 这两个通项公式形式上虽然不同, 但表示同一个数列.

笔者认为, 以上这段话固然正确, 但所举例子似乎没有揭示问题的实质. 因为 $(-1)^n$ 与 $a_n = \begin{cases} -1, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 1, & n = 2k, \quad k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ 是两种等价形式, 实际上

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 1, & n = 2k, \quad k \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

我们知道, 数列的通项公式其实也是函数解析式. 既然函数可有分段函数表示式, 那么数列的通项公式当然也可以分段表示.

这样一来, 所有的无穷数列都可用分段形式表示, 即所有的无穷数列都有这种分段形式的通项公式了!

如果仅从形式上看, 笔者思考: 写出上面数列的另一个通项 $a_n = \cos(n\pi)$ 似乎更有说服力, 但考虑到三角函数是数列的后续内容, 这个例子又不能对学生举(教师明白就行了)! 为了弥补这个不足, 教学时不妨补充如下例子.

例如, 如果 $a \neq b$, 对于数列: a, b, a, b, a, b, 根据前面定理1, 有一个五次多项式型的通项公式, 又根据定理2 ,它的多项式形式的通项公式有无数多个; 除此之外, 它又有另一形式的通项公式

$$a_n = \frac{(a+b) + (-1)^{n+1}(a-b)}{2}.$$

当然它还有三角形式的通项公式

$$a_n = a\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| + b\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right| 等.$$

如果将上述数列扩充成为无穷数列: $a, b, a, b, a, b, \cdots$ 后, 除了前面六个项外, 从第七项开始, 这些通项公式所确定的项一般就不相同了. 即对扩充后的无穷数列而言, 前者就不是它的通项公式了. 当然

$$\frac{(a+b) + (-1)^{n+1}(a-b)}{2} \equiv a\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| + b\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|.$$

参考文献:

[1] 黄桂君. 这个数列有通项公式吗? 数学通讯. 2004(19).

图形计算器支持下的有关雪花曲线的探究

200023 上海市卢湾高级中学 刘卫华

"雪花曲线"是数学史上的一个经典故事，上海新课程改革中首次将其列入教材内容，为此，笔者针对新教材中的雪花曲线这一部分内容，借助图形计算器开展了教学探究.

一、情景创设，体验过程

创设一个体验的情景，让每一位学生在亲手绘制雪花曲线的过程中体会出"雪花"的变化过程，从感性认识入手，使学生对美妙的"雪花"产生兴趣，为后续的分析、思考做好铺垫. 为此，笔者设计了雪花曲线的图纸，便于学生绘制，不仅提高了课堂教学的效率，也使学生在探索雪花曲线的过程中，不必将过多的时间耗费在作图上，而是将学生的注意力集中在探索变化的规律上，也为学生采集数据，创设了平台.

图纸的设计灵感来自于小方格纸的启发，结合雪花曲线的特征，经过反复思考和探索，创作了形如图1的图纸.

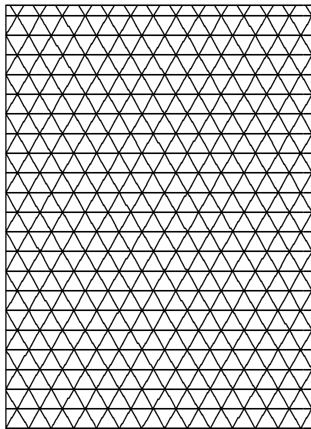


图 1

T: 请大家在手中的图纸中，作一个边长为9个单位的正三角形，再将正三角形的每边三等分，并以中间的那一条线段为底边向形外作等边三角形，然后去掉底边. 重复以上作法若干次会得到怎样的效果呢?

二、展示作品，采撷信息

当学生非常轻松地完成作品以后，将进行怎样的信息收集呢? 教师应该如何尽可能少地干扰学生的思路，而又使学生自然地收集到相关信息呢?

T: 请哪位同学来展示一下他的作品? 并指出"雪花曲线"的变化过程中，图形的哪些量发生了变化.

在总结了学生的回答以后，为了便于学生记录有用的数据，笔者设计了一张表格，要求学生在自主地进行探究作图后，通过填表的形式很自然地把观察到的现象和已学的知识联系在一起，通过数形结合的方法，把观察到的形转换成表中的数，自主地进行采集数据.

	边数	每边长度	周长
F_1	3	1	3×1
F_2	12	$\frac{1}{3}$	$12\times\frac{1}{3}$
F_3	48	$\frac{1}{9}$	$48\times\frac{1}{9}$
F_4	192	$\frac{1}{27}$	$192\times\frac{1}{27}$
递推公式			
通项公式			

F_n 所围成的面积 P_n

F_1	F_2	F_3	F_4
$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$F_1+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\cdot 3$	$F_2+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{81}\right)\cdot 12$	$F_3+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{729}\right)\cdot 48$

三、借助图形，寻求通项

利用图形计算器自带的回归功能进行数据分析和处理. 由于数列的通项公式表示的是数列的项和项数之间的函数关系，通过知识迁移，易于把函数中自变量和因变量的关系联系在一

起. 数列图象也可以看作定义在自然数子集上的离散函数, 借助于图形计算器的回归函数进行回归分析, 培养学生观察和分析回归图象的能力. 学生可以从图象上观察到回归函数是否经过了每一个数列点, 直观地判断回归函数是否可以作为该数列的通项公式.

部分过程:

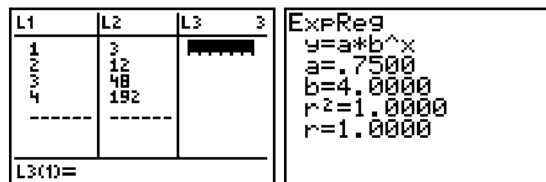


图2 图3

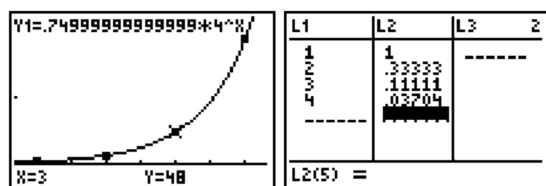


图4 图5

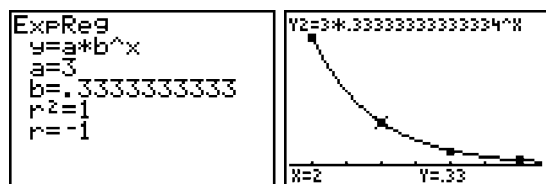


图6 图7

用函数拟合的思想, 提供寻求数列通项公式的又一方法, 同时要求学生通过函数拟合的过程体验数据分析的经历, 掌握数列函数和拟合函数的关系, 区分离散和连续的情况, 进而帮助学生加深对数列图象的研究和数列通项公式的理解.

四、借助图形, 诊断拟合

所谓"形少数时难入微", "眼见未必属实", 有时由于机器精度的问题, 肉眼很难发现细小的误差, 我们可以打开图形计算器自带的Diagnostic功能进行判断. 若回归系数越接近1, 则说明该回归函数拟合得越好, 该函数也就越接近该数列的通项公式.

S: 在对与面积相关的数据进行回归时, 调用了所有计算器自带的回归函数, 均没有得到回归系数是1的结果, 那该如何处理? 能否说该数列没有通项公式? (学生的一个问题引发了一个机会.)

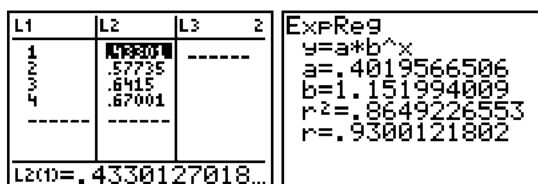


图8 图9

T: 好!我们有可能碰到这样的情况, 那该怎么办呢?

五、新的问题, 新的探索

对回归函数和通项公式进行比较研究, 若回归系数不为1, 我们知道回归得不够理想, 回归函数的解析式一定不是数列的通项公式, 但如果回归系数为1, 我们是否就不需要严密的数学证明呢?

S: 回归系数如果是1, 那么我们能否断定该回归函数一定是所求数列的通项公式呢?

组织讨论, 让学生在合作互助的过程中分享收获, 同时也培养了学生团队精神. 在学生思维碰撞的过程中, 大家进行了下面的探索. 我们对边数数列进行回归分析时, 发现了使用两个不同的回归函数都能得到回归系数为1的结论. 采集的数据为3、12、49、192, 用3次回归和指数回归都得到了回归系数为1的结果.

1. 采用3次回归, 得到的结果如下:

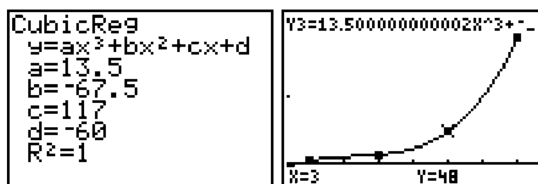


图10 图11

2. 采用指数回归, 得到的结果如下:

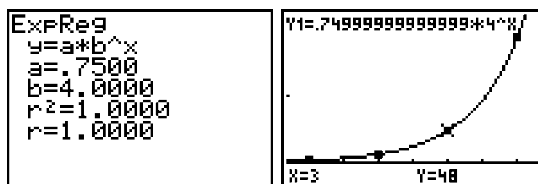


图12 图13

圆锥曲线一个有趣的共线性质

321000 浙江省金华市第三中学 蒋根洪

在圆中有如下易见的性质: 圆中平行弦两端点处圆的切线的交点在一条直线上, 且该直线平分这组平行弦 (如图1所示).

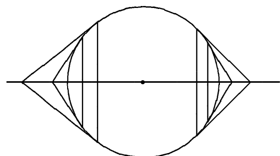


图 1

那么, 在椭圆、抛物线、双曲线中是否也有这样的性质呢? 我们作如下猜想:

圆锥曲线平行弦两端点P、Q处的切线的交点R在一条直线上, 且该直线平分这组平行弦.

下面分别对椭圆、抛物线、双曲线逐一进行证明.

1. 抛物线

设抛物线方程$y^2=2px(p>0)$, $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 弦PQ所在直线斜率为$k(k\neq 0)$并与x轴交点为$T(t,0)$(如图2), 则直线PQ的方程: $y=k(x-t)$.

(I) 求平行弦PQ中点的轨迹.

弦的端点$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$满足

T: 为什么会发生这样的情况呢? 基于我们已经掌握一个数列可能对应两个不同的通项公式, 能否简单地把这两个回归函数都作为该数列的通项公式呢?

S: 该问题可能由于数据的有限性导致的. 数据越少, 符合的回归函数就越多, 可以尽可能多地采集数据来减小回归的误差.

在这位同学的建议下, 我们又采集了第五项768, 这时, 图象上的结果就十分明了了.

L1	L2	L3 2
1	3	------
2	12	
3	48	
4	192	
5	768	

L2(6) =

图14

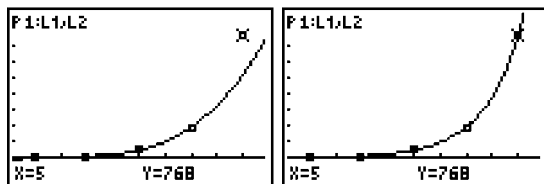


图15 图16

在这个过程中, 学生发现数据采集的量直接关系到拟合的误差, 解决这个问题的方法容易想到的是尽量多地采集数据, 但是我们不可能罗列出所有的数据, 那么倡导学生利用近似、猜测和证明相结合方法就成了必不可少的. 正如华罗庚教授所说“数缺形时少形象, 形少数时难入微.”

在利用图形计算器进行回归的探究后, 学生对通项公式有了更形象的理解, 对项和项数这两个概念的理解也更清晰了, 也使数列的学习与函数图象建立了联系, 使知识体系更完整, 使学习更直观, 更有利于激发学生的学习兴趣、学习动力和学习能力.

参考文献

1. 上海市中小学课程标准 (征求意见稿). 上海教育出版社. 2002年11月.

2. 王长沛. 图形计算器与中学数学活动案例选. 北京大学出版社. 2002年7月.

3. 张益. 利用图形计算器进行数学教学. 数学教学. 2004.2.

4. 王芝平. 图形技术支持下的教学探索. 数学通报. 2004.2.

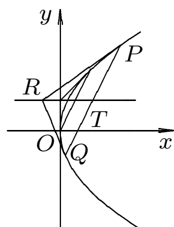


图 2

$$\begin{cases} y=k(x-t), & (1)\\ y^2=2px. & (2)\end{cases}$$

把(1)代入(2), 整理得

$$x^2-2\left(t+\frac{p}{k^2}\right)x+t^2=0. \tag{3}$$

因为弦所在的直线与抛物线有两个交点, 所以

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[-2\left(t+\frac{p}{k^2}\right)\right]^2-4t^2\\&=\frac{4p}{k^2}\left(2t+\frac{p}{k^2}\right)\geqslant 0,\end{aligned}$$

由此得 $t\geqslant-\dfrac{p}{2k^2}$, 由韦达定理得

$$x_1+x_2=2\left(t+\frac{p}{k^2}\right),$$

$$\begin{aligned}y_1+y_2&=k(x_1-t)+k(x_2-t)\\&=k(x_1+x_2)-2kt\\&=k\cdot 2\left(t+\frac{p}{k^2}\right)-2kt\\&=\frac{2p}{k},\end{aligned}$$

所以, PQ的中点坐标为

$$\begin{cases} x=t+\dfrac{p}{k^2},\\ y=\dfrac{p}{k},\end{cases}\quad\left(t\geqslant-\frac{p}{2k^2}\right),$$

即 $y=\dfrac{p}{k}\ \left(x\geqslant\dfrac{p}{2k^2}\right).$ (4)

这就是平行弦PQ的中点轨迹的方程, 其中k是常数, 因此平行弦PQ的中点轨迹是一条平行于x轴的射线, 端点坐标为$\left(\dfrac{p}{2k^2},\dfrac{p}{k}\right)$, 方向向右.

(II) 求过平行弦PQ两端点的切线的交点轨迹.

设过P、Q两端点引抛物线的切线分别为PR、QR, 它们的交点为R. 则两切线方程为

$PR:\ y_1y=p(x+x_1)$,

$QR:\ y_2y=p(x+x_2)$,

两切线交点坐标$R(x,y)$满足

$$\begin{cases} y_1y=p(x+x_1),\\ y_2y=p(x+x_2),\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}, & (5)\\ y=p\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}. & (6)\end{cases}$$

把$y_1=k(x_1-t)$, $y_2=k(x_2-t)$代入(5)、(6), 化简得

$$\begin{cases} x=-t,\\ y=\dfrac{p}{k},\end{cases}\quad\left(t\geqslant-\frac{p}{2k^2}\right),$$

即$y=\dfrac{p}{k}\ \left(x\leqslant\dfrac{p}{2k^2}\right).$ (7)

这就是两切线PR、QR的交点R的轨迹方程. 因此点R轨迹是一条平行于x轴的射线, 端点坐标也为$\left(\dfrac{p}{2k^2},\dfrac{p}{k}\right)$, 方向向左并且与平行弦$PQ$的中点轨迹恰好构成一条直线.

对于平行弦PQ斜率不存在时, 方程(4)、(7)分别成为$y=0\,(x\geqslant 0)$; $y=0\,(x\leqslant 0)$. 即平行弦PQ中点轨迹为x轴的正半轴, 切线交点的轨迹为x的负半轴.

综上证明可得: 抛物线平行弦两端点处的切线的交点轨迹和这组平行弦的中点轨迹组成一条直线, 且该直线与抛物线的对称轴平行或重合.

2. 椭圆

设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 椭圆上的弦$PQ$所在的直线斜率为$k(k\neq 0)$并与$x$轴交点为$T(t,0)$, 弦端点为$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$(如图3), 则直线$PQ$的方程: $y=k(x-t)$.

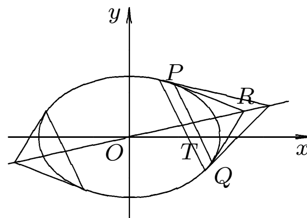


图 3

(I) 求平行弦PQ中点的轨迹.

弦的端点$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$满足

$$\begin{cases} y=k(x-t), & (8)\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. & (9)\end{cases}$$

把(8)代入(9), 整理得 $(k^2a^2+b^2)x^2-2k^2a^2tx+a^2(k^2t^2-b^2)=0.$ (10)

$\Delta=(-2k^2a^2t)^2-4(k^2a^2+b^2)\cdot a^2(k^2t^2-b^2)=4a^2b^2(k^2a^2+b^2-k^2t^2)$,

由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{k^2}}$, 又 $y_1+y_2=k(x_1-t)+k(x_2-t)=k(x_1+x_2)-2kt$, 故

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k^2a^2t}{k^2a^2+b^2},\\ y_1+y_2=-\dfrac{2kb^2t}{k^2a^2+b^2}, \end{cases}$$

所以平行弦 PQ 的中点轨迹方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{k^2a^2}{k^2a^2+b^2}t,\\ y=-\dfrac{kb^2}{k^2a^2+b^2}t, \end{cases}\left(|t|\leqslant\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{k^2}}\right),$$

即 $y=-\dfrac{b^2}{ka^2}x\ \left(|x|\leqslant\dfrac{|k|a^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}\right).$ (11)

这是一条过原点的线段, 是椭圆的一条弦.

(II) 求过平行弦 PQ 两端点的切线的交点轨迹.

设过 P、Q 两端点引椭圆的切线分别为 PR、QR, 它们的交点为 R. 则两切线方程为 PR: $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$,

QR: $\dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1$,

解得它们的交点 R 的坐标

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1}, & (12)\\ y=-\dfrac{b^2(x_2-x_1)}{x_1y_2-x_2y_1}. & (13) \end{cases}$$

把 $y_1=k(x_1-t)$, $y_2=k(x_2-t)$ 代入(12)、(13), 化简得

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{t},\\ y=-\dfrac{b^2}{kt}, \end{cases}\left(|t|\leqslant\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{k^2}}\right),$$

即 $y=-\dfrac{b^2}{ka^2}x\ \left(|x|\geqslant\dfrac{|k|a^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}\right).$ (14)

这就是两切线交点的轨迹方程, 它表示端点在椭圆上的两条射线, 方向背离原点, 并且与平行弦 PQ 的中点轨迹恰好构成一条斜率为 $-\dfrac{b^2}{ka^2}$ 且经过原点的直线.

对于 $k=0$, 平行弦 PQ 的中点轨迹与它们的端点的切线的交点轨迹方程分别为 $x=0\,(|y|\leqslant b)$ 与 $x=0\,(|y|\geqslant b)$, 它们分别表示椭圆的短轴和短轴外侧的两条射线.

对于斜率 k 不存在, 方程(13)、(14)分别成为 $y=0\,(|x|\leqslant a)$; $y=0\,(|x|\geqslant a)$. 它们分别表示椭圆的长轴和长轴外侧的两条射线.

综上证明得: 椭圆平行弦两端点处的切线的交点轨迹和这组平行弦的中点轨迹组成一条直线, 且该直线过椭圆的中心.

3. 双曲线

设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 它可改成 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{(-b^2)}=1$, 因此, 对于双曲线求平行弦 PQ 的中点轨迹与它们的切线交点轨迹, 只需把椭圆的类似计算中的 b^2 换成 $-b^2$, 即可得出相应的如下两个性质.

性质一: 夹在同支双曲线内的平行弦两端处的切线的交点轨迹和这组平行弦的中点轨迹组成一条过双曲线的中心的直线 (但中心不在此轨迹内) (如图4).

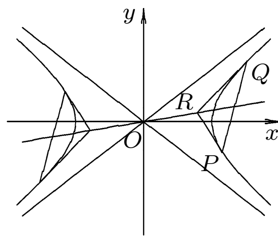


图 4

性质二: 夹在两支双曲线内的平行弦两端点的切线的交点轨迹和这组平行弦的中点轨迹组成一条过双曲线的中心的直线 (如图5).

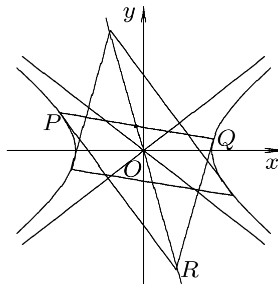


图 5

例谈“三个二次”分类讨论所依据的标准

528203 广东省佛山市九江中学 肖宪龙

在“二次方程、二次不等式和二次函数”(简称“三个二次”)的教学中, 经常会遇到分类讨论的标准问题, 本文借助例题对其进行探究.

标准一 依据二次项系数

例1 函数$y=(a-2)x^2+2(a-2)x-4$的值恒小于0, 则a的取值范围是____.

略解: 因已知函数的值恒小于0, 于是转化为不等式小于0恒成立, 根据二次项系数$a-2=0$和$a-2\neq 0$分为两种情况讨论.

故有$a-2=0$或
$$\begin{cases} a-2<0, \\ \Delta=4(a-2)^2-4(a-2)\cdot(-4)<0. \end{cases}$$
可得实数a的取值范围是$(-2,2]$.

标准二 依据二次方程根的大小

例2 (2001年全国高考试题)解不等式 $\dfrac{x-a}{x-a^2}<0$.

分析: 原不等式等价于$(x-a)(x-a^2)<0$, 根据相应二次方程的根的大小分为$a^2<a$、$a^2=a$和$a^2>a$三种情况讨论, 来确定二次不等式的解集.

解: 由$a^2-a=a(a-1)<0$, 有$0<a<1$.

(1)当$0<a<1$时, 即$a^2<a$, 不等式的解集为$\{x|a^2<x<a\}$;

(2)当$a=1$或$a=0$时, 即$a^2=a$, 不等式的解集为$\{x|x\in\varnothing\}$;

(3)当$a>1$或$a<0$时, 即$a^2>a$, 不等式的解集为$\{x|a<x<a^2\}$.

标准三 依据判别式Δ

例3 解关于x的不等式 $3x^2-mx-m>0$.

分析: 因二次不等式的二次项系数为$3>0$, 故应根据判别式$\Delta>0$、$\Delta=0$、$\Delta<0$分三种情况分类讨论, 探求字母的取值范围而得出不等式的解集.

解: 因为$\Delta=m^2+12m=m(m+12)$,

① 当$\Delta>0$时, 即当$m>0$或$m<-12$时, 可得 $x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2+12m}}{6}$, 则不等式的解集为$\left(-\infty,\dfrac{m-\sqrt{m^2+12m}}{6}\right)\cup\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2+12m}}{6},+\infty\right)$;

② 当$\Delta=0$时, 即当$m=0$时, 不等式的解集为$\{x|x\in\mathbf{R},且x\neq 0\}$;

当$m=-12$时, 不等式的解集为$\{x|x\in\mathbf{R},且x\neq -2\}$.

③ 当$\Delta<0$时, 即当$-12<m<0$时, 不等式的解集为$\mathbf{R}$.

标准四 依据对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}$

例4 求函数$y=x^2-2ax-1$在[0,2]的值域.

分析: 由$y=(x-a)^2-(a^2+1)$可知对称轴为$x=a$, 是一个变数, 根据对称轴的位置应分$a<0$、$0\leqslant a\leqslant 2$、$a>2$三种情况分类讨论.

解: 结合二次函数的图象, 观察对称轴$x=a$与区间[0,2]的位置关系得

(1)当$a<0$时, $y_{\min}=f(0)=-1$,
$y_{\max}=f(2)=3-4a$,
则$y\in[-1,3-4a]$;

(2)当$0\leqslant a\leqslant 2$时, $y_{\min}=-(a^2+1)$, 函数的最大值必在区间两个端点中的某一个中取得, 而$f(0)=-1$, $f(2)=3-4a$, 又$3-4a-(-1)=-4(a-1)$, 故有

① 当$0\leqslant a\leqslant 1$时, $y_{\max}=f(2)=3-4a$, 则$y\in[-(a^2+1),3-4a]$;

② 当$1<a\leqslant 2$时, $y_{\max}=f(0)=-1$, 则$y\in[-(a^2+1),-1]$;

(3) 当$a>2$时, $y_{\min}=f(2)=3-4a$, $y_{\max}=f(0)=-1$, 则$y\in[3-4a,-1]$.

标准五　依据区间端点的函数值

例5　已知$\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$, 若$f(x)=ax^2-2x+1$在区间$[1,3]$上的最大值为$M(a)$, 最小值为$N(a)$, 令$g(a)=M(a)-N(a)$, 求$g(a)$的函数表达式.

分析: 因二次函数的对称轴为$x=\dfrac{1}{a}$, 而$\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$, 则有$1\leqslant\dfrac{1}{a}\leqslant 3$, 故二次函数的对称轴为$x=\dfrac{1}{a}\in[1,3]$, 则二次函数在[1,3]上的最小值在抛物线的顶点取得, 而最大值应在区间的端点取得, 故可通过讨论函数区间端点的取值的大小来确定最大值.

解: 由上分析可得

$N(a)=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\dfrac{1}{a}$, 而$f(1)=a-1$, $f(3)=9a-5$, 故

(1) 当$9a-5\geqslant a-1$, 即$\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$时, 则有$M(a)=f(3)=9a-5$, 故$g(a)=M(a)-N(a)=9a+\dfrac{1}{a}-6$.

(2) 当$9a-5<a-1$, 即$\dfrac{1}{3}\leqslant a<\dfrac{1}{2}$时, 则有$M(a)=f(1)=a-1$, 故$g(a)=M(a)-N(a)=a+\dfrac{1}{a}-2$.

综合(1)、(2)可知

$$g(a)=\begin{cases}a+\dfrac{1}{a}-2 & \left(\dfrac{1}{3}\leqslant a<\dfrac{1}{2}\right),\\ 9a+\dfrac{1}{a}-6 & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1\right).\end{cases}$$

例6　已知函数$f(x)=(m-2)x^2-4mx+2m-6$的图象与x轴的负半轴有交点, 求实数m的取值范围.

分析: 因函数图象与x轴的负半轴有交点, 则方程$(m-2)x^2-4mx+2m-6=0$在区间$(-\infty,0)$内有实根, 先由对称轴的位置分类, 再考虑二次项系数的正负, 然后考虑判别式的值和区间端点函数的取值.

解: (1) 当$m-2=0$, 即$m=2$时, 由$-8x-2=0$, 有$x=-\dfrac{1}{4}$, 则$f(x)$与x轴的负半轴有一个交点.

(2) 当$m-2\neq 0$, 即$m\neq 2$时, 函数$f(x)$的对称轴为$x=\dfrac{2m}{m-2}$,

故有$\begin{cases}\dfrac{2m}{m-2}\geqslant 0\\ m-2>0\\ f(0)<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{2m}{m-2}\geqslant 0\\ m-2<0\\ f(0)>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{2m}{m-2}<0\\ \Delta\geqslant 0,\end{cases}$ 则$2<m<3$或$1\leqslant m<2$.

综上所述, 实数m的取值范围是$1\leqslant m<3$.

(上接第6–13页)

数学教育. 2004年第3期. 16–19.

[2] 孔凡哲、刘晓玫、孙晓天. 义务教育数学课程标准空间与图形的特点. 数学教育学报. 2001年8月. Vol. 10. No. 3.

[3]孔凡哲. 数学课程标准实验教科书发展中的问题及其对策. 教育科学研究. 2005年第3期: 53-56.

[4]姚晶. 三十年中学数学教材的回顾和今后改革刍议. 瞿保奎. 教育学文集・课程与教材(下). 人民教育出版社. 1993年3月.

[5] (俄)И.Ф.ЩарІгин 等著, 吕乃刚译. 张奠宙校. 直观几何. 华东师范大学出版社. 2001年1月.

[6]何思源. 士大夫教育之恶果及教育改造途径. 东方. 第31卷第6号. 1934年3月16日.

[7] 任景业. 初中数学教材呈现形式探. "华人地区面向21世纪基础教育课程与教学改革"学术研讨会交流论文. 1997年8月.

[8] 刘兼、孙晓天主编. 全日制义务教育数学课程标准(实验稿)解读. 北京师范大学出版社. 2002年5月.

与三角函数初相“φ”相识

246725 安徽省枞阳横埠中学 章礼抗

人教版新教材高中数学《三角函数》一章中, 三角函数图象有相当重要的地位, 因它集中地反映了三角函数的所有性质. 因此对其学习和理解既是重点又是难点. 课本为说明三角函数图象变化机理, 详细地介绍了怎样由$y=\sin x$逐步变化成$y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中$A$、$\omega$、$\varphi$是常量), 以便学习者能够从中领悟到其他三角函数图象变化机理. 但是在其变化过程中, 难点是对“φ”的认识、理解、确定. 原因是课本中只简单地说了一句, “在$\omega x+\varphi$中, 当$x=0$时, φ叫初相”. 如要问它在三角函数中到底有什么作用, 可能学过之后, 知之甚少, 在实际中难以确定它. 本文想通过分析函数的性质, 来揭示φ与函数深刻的内在联系, 以便对其有较全面的认识.

一、图象的对称性与φ的关系

大家都明白$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中$A$、$\omega$、$\varphi$是常量)的图象既是轴对称图形又是中心对称图形; 下面看看其对称轴和对称中心与φ的关系.

(1) $\omega x+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow$

$x=\dfrac{k}{\omega}\pi+\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ (对称轴).

(2) $\omega x+\varphi=k\pi\Longrightarrow x=\dfrac{k}{\omega}\pi-\dfrac{\varphi}{\omega}$ $(k\in\mathbf{Z})$, 则$P_k\left(\dfrac{k}{\omega}\pi-\dfrac{\varphi}{\omega},0\right)$是对称中心.

同理 $g(x)=A\cos(\omega+\varphi)$的对称轴是$x=\dfrac{k}{\omega}\pi-\dfrac{\varphi}{\omega}$ $(k\in\mathbf{Z})$, 对称中心是$R_k\left(\dfrac{k}{\omega}\pi+\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right),0\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

$h(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$的对称中心是$Q_k\left(\dfrac{k}{\omega}\pi-\dfrac{\varphi}{\omega},0\right)$.

实例分析与应用:

例1 (2004年全国高考) 函数$y=\tan(2x+\varphi)$图象的一个对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$, 则$\varphi$可以是……………………………………………( )

(A) $\dfrac{\pi}{3}$; (B) $-\dfrac{\pi}{6}$; (C) $\dfrac{\pi}{6}$; (D) $-\dfrac{\pi}{12}$.

分析: 由上可知$\dfrac{k}{2}\pi-\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{Z})$, 则随k取不同整数得φ可能的值为$-\dfrac{\pi}{6}$, 故选(B).

例2 已知$y=\sin 2x+a\cos 2x$, 在下列条件下分别求实数a的值. (1) 函数图象关于原点对称; (2) 函数图象关于$x=-\dfrac{\pi}{8}$对称.

分析: 因$\sin 2x+a\cos 2x=\sqrt{1+a^2}\cdot\sin(2x+\varphi)$(其中$\tan\varphi=a$), 则由上分析知

$\dfrac{k}{2}\pi-\dfrac{\varphi}{2}=0\Longrightarrow\varphi=k\pi\Longrightarrow\tan\varphi=a=0$;

$\dfrac{k}{2}\pi+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=-\dfrac{\pi}{8}\Longrightarrow\varphi=k\pi+\dfrac{3}{4}\pi\Longrightarrow\tan\varphi=a=-1$ $(k\in\mathbf{Z})$.

二、函数奇偶性与φ的关系

(1) 若$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$是奇函数, 则$\varphi$应满足什么条件?

因$f(x)$是奇函数, 则原点O是其图象的一个对称中心, 由第一节的分析知$\dfrac{k}{\omega}\pi-\dfrac{\varphi}{\omega}=0\Longrightarrow\varphi=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ (φ与其他参量无关).

(2) 若$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$是偶函数, 则$\varphi$应满足什么条件?

因$f(x)$是偶函数, 则y轴是其图象的一条对称轴, 由第一节的分析知$\dfrac{k}{\omega}\pi+\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=0\Longrightarrow\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ (φ与其他参量无关).

同理可知$g(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$中, 当$\varphi=$

$k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$时, 是偶函数, 当$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbf{Z})$时, 是奇函数.

$h(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$中, 当$\varphi=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$时, 是奇函数.

实例分析与应用:

例3　(2004年辽宁高考)已知函数$f(x)=\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)-1$, 则下列命题正确的是····(　)

(A) $f(x)$是周期为1的奇函数;

(B) $f(x)$是周期为2的偶函数;

(C) $f(x)$是周期为1的非奇非偶函数;

(D) $f(x)$是周期为2的非奇非偶函数.

分析: 因$\omega=\pi\Longrightarrow T=2$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$, 故$f(x)$是偶函数, 选(B).

例4　(2003年天津市高考)已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$是$\mathbf{R}$上偶函数, 其图象关于点$M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$对称, 且在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是单调函数, 求$\omega$和$\varphi$的值.

分析: 因$f(x)$是偶函数, 故得$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbf{Z})$;

因$f(x)$的图象关于点$M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$对称,

故有$\dfrac{k}{\omega}\pi-\dfrac{\varphi}{\omega}=\dfrac{3\pi}{4}\,(k\in\mathbf{Z})$;

又因$0<\varphi<\pi$, 故当$k=0$时, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$符合条件; 则$\omega=\dfrac{2}{3}(2k-1)=-\dfrac{2}{3}\,(k\in\mathbf{Z})$.

当$k=1$时, $\omega=\dfrac{2}{3}$, $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上递减, 满足条件.

当$k=2$时, $\omega=2$, $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上递减, 满足条件.

当$k\geqslant3$时, $\omega\geqslant\dfrac{10}{3}$, $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上非单调函数.

综上所知,满足条件的$\omega=\dfrac{2}{3}$或$\omega=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

三、具体图象中φ的确定

数学中有一类根据具体三角函数图象确定函数解析式问题, 在这类问题中φ的确定尤为值得大家关注. 通常做法是在图象上任取一已知点(x_0,y_0)代入解析式, 考虑到ωx_0、φ的范围, 一般可确定如下五个关键点: $\omega x_1+\varphi=0$, $\omega x_2+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $\omega x_3+\varphi=\pi$, $\omega x_4+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$, $\omega x_5+\varphi=2\pi$.

因ω一般易求, 求φ也就很方便. 对φ本无限制, 但一般要求$\varphi\in(-\pi,\pi)$.

实例分析与应用:

例5　(2004年辽宁高考)若函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$图象(部分), 如图1所示, 则$\omega$和$\varphi$的取值是··(　)

(A) $\omega=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$;

(B) $\omega=1$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$;

(C) $\omega=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$;

(D) $\omega=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

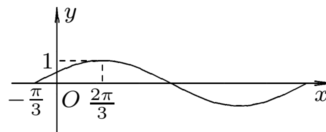


图 1

分析: 由图象知$\dfrac{T}{4}=\dfrac{2\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi\Longrightarrow T=4\pi\Longrightarrow\omega=\dfrac{1}{2}$.

由图象知点$\left(\dfrac{2\pi}{3},1\right)$在其上,

故$1=\sin\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\right)$.

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, 故选(C).

例6　(2002年全国高考)如图2, 某地一天从6时到14时的温度变化曲线近似满足$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$. (I)求这段时间的最大温差. (Ⅱ)写这段曲线的函数解析式.

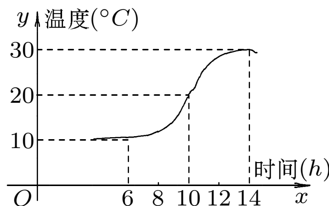


图 2

解: (I)这段时间最大温差是 $30-10=$

(下转第6–49页)

在数形结合下构建图形的几个切入点

315300 浙江省慈溪育才中学 杨群飞

新课程标准注重信息技术与数学课程的整合, 充分显示了几何动态教学中画板平台的作用, 进一步突出了数形结合的思想方法. 重视构建几何模型及其构建图形的切入点, 对培养学生的探究能力和建模能力有积极作用. 挖掘陈题、创新背景、巧妙联系图形解决常规问题会有耳目一新的感觉. 笔者摘编数例与大家探讨.

1. 由函数式直接切入图象

例1 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 满足 $f(-1)=0$, 对 $x\in\mathbf{R}$, $x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x^2+1}{2}$ 恒成立. 求 a、b、c 的值.

分析: 如图1, 由"$x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x^2+1}{2}$"直接联系函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2+1}{2}$ 的图象. 直线 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2+1}{2}$ 的图象相切于点 (1,1), 而 $y=f(x)$ 图象介于两者之间, 得 $y=f(x)$ 图象也与直线 $y=x$ 相切于点 (1,1). 所以 $\begin{cases}f(-1)=0,\\ f(1)=1,\\ f'(1)=1.\end{cases}$ 易得 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{4}$.

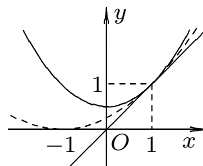


图 1

余味: 由图象得到抛物线的切线, 利用导数的几何意义得 $f'(1)=1$, 列出三个一次式, 解出 a、b、c. 不但简化了运算, 同时突出了新课标下导数的应用.

2. 由分解函数切入图象

例2 求函数 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}\,(x>0,\ k>0)$ 的单调区间.

分析: 作出函数 $y=f(x)$ 图象较困难, 如图2, 由 $f(x)=\dfrac{k}{x}-(-x)$ 联系函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$ 及 $y=-x$ 的图象, 得与直线 $y=-x$ 平行的直线与曲线 $y=\dfrac{k}{x}\,(x>0)$ 相切于点 $A(\sqrt{k},\sqrt{k})$. 对任意 x, $f(x)$ 的几何意义为图中有向线段 NP, 由图2, 在线段 BA 的左侧, 有向线段 NP 随 x 的增大而减小; 在线段 BA 的右侧, 有向线段 NP 随 x 的增大而增大. 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\sqrt{k},+\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间为 $[0,\sqrt{k})$.

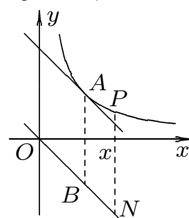


图 2

例3 求 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 的单调区间.

分析: 作出函数 $f(x)$ 图象较困难, 如图3, 由 $f(x)=\sqrt{1-x^2}-(-x)$ 联系 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-x$ 的图象, 得与直线 $y=-x$ 平行的直线与半圆相切于点 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 对任意 x, $f(x)$ 的几何意义为图中有向线段 NP, 由图3, 在线段 BA 的左侧, 有向线段 NP 随 x 的增大而增大. 在线段 BA 的右侧, 有向线段 NP 随 x 的增大而减小. 因此, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $f(x)$ 的单调递减区间 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

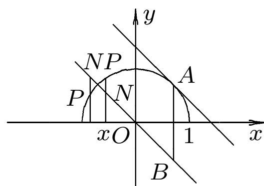


图 3

余味: 通过分解函数, 把函数$f(x)$的几何意义理解为有向线段, 似同把三角函数看成单位圆中的三角函数线一样, 充分体现了新课标下向量作为基本工具的灵活应用.

3. 由构造函数切入图象

例4 设$0 < x_1 < x_2 < \pi$, 且$a = \dfrac{\sin x_1}{x_1}$, $b = \dfrac{\sin x_2}{x_2}$, 比较$a$与$b$的大小.

分析: 由式子$\dfrac{\sin x}{x}$的结构可知, $\dfrac{\sin x}{x}$的几何意义为点$(0, 0)$与点$(x, \sin x)$的连线的斜率. 联系函数$y = \sin x\ (0 < x < \pi)$的图象. 由图4, 直线$OA$的斜率大于直线$OB$的斜率, 即$a > b$.

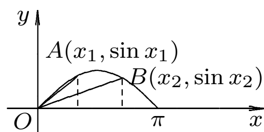


图 4

例5 设a、b、λ为正数, 比较$\ln\dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda}$与$\dfrac{\ln a + \lambda \ln b}{1+\lambda}$的大小.

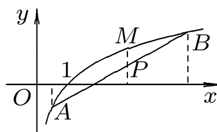


图 5

分析: 由已知式子的结构知 $\dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda}$、$\dfrac{\ln a + \lambda \ln b}{1+\lambda}$ 可看作分别是点 $A(a, \ln a)$ 与 $B(b, \ln b)$所成的有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比为λ的分点的横、纵坐标, 因为λ大于零, 由$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$知$P$是有向线段$\overrightarrow{AB}$内分点. 联系对数函数$y = \ln x$的图象, 由图5, 点$M$的纵坐标大于点$P$的纵坐标, 即$\ln\dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda} > \dfrac{\ln a + \lambda \ln b}{1+\lambda}$.

余味: 从式子的结构和意义入手, 抓住动点变化的轨迹, 构造函数, 切入图象, 对学生建模能力的培养无疑是有积极作用的.

4. 由转化函数切入图象

例6 求函数$y = x + \sqrt{1-x^2}$的值域.

分析: 把此问题转化为"关于x的方程$\sqrt{1-x^2} = y - x$有解, 求y的范围"等价于"关于x的方程 $\sqrt{1-x^2} = m - x$有解, 求m的范围", 如图6, 联系函数$y = \sqrt{1-x^2}$和$y = m - x$图象, 要使两图象有交点, 则有$-1 \leqslant m \leqslant \sqrt{2}$, 所以函数值域为$[-1, \sqrt{2}]$.

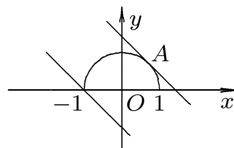


图 6

余味: 转化函数切入解析几何中的常见曲线, 把曲线间有公共点的问题转化为新课标下类似线性规划问题, 突出了知识交汇点的融会贯通.

例7 解不等式$\log_5(1+\sqrt{x}) > \log_{16} x$.

分析: 令$t = \sqrt{x}$, 不等式转化为$\log_5(1+t) > \log_4 t$, 联系$y = \log_4 t$和$y = \log_5(1+t)$图象. 由图7, 两个图象都经过点(4,1), 因此$0 < t < 4$, 所以$0 < x < 16$.

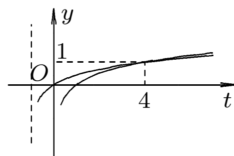


图 7

例8 设a、b、c是不全为零的非负实数, 求$y = \dfrac{ab+2bc}{a^2+b^2+c^2}$的最大值.

分析: 当$b = 0$时, $y = 0$;

当$b \neq 0$时, $y = \dfrac{\dfrac{a}{b} + 2\cdot\dfrac{c}{b}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{b}\right)^2 + 1}$, 令$t = \dfrac{a}{b}$, $\lambda = \dfrac{c}{b}\ (t \geqslant 0, \lambda \geqslant 0)$, $y = \dfrac{t+2\lambda}{t^2+\lambda^2+1}$,

(下转第6–21页)

例谈平面几何中圆的性质在解析几何中的应用

225500 江苏省姜堰中学 张圣官

解析几何是在建立坐标系的基础上, 用坐标表示点, 用方程表示曲线, 通过代数运算处理几何问题的一门数学. 但是, 一味强调解析几何中的计算, 有时会导致烦琐的过程. 而如果在进行计算的同时能综合考虑几何因素, 则往往能够简化运算. 以"圆"为例, 在解析几何中, 涉及到直线和圆的有关问题时, 若能抓住题设中图形特征和数量关系, 充分利用平面几何中圆的有关性质, 常可得到简捷解法.

1.巧用"垂径定理"

例1 已知$A(3,0)$是圆$x^2+y^2=25$内的一个定点, 以A为直角顶点作直角三角形ABC, 且点B、C在圆上, 试求BC中点M的轨迹方程.

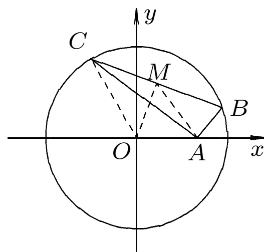


图1

分析: 如图1, B、C都为圆上的动点, 若设出B、C的坐标, 引进角参数, 将导致繁复的运算. 如果注意到由"垂径定理"知$OM\perp BC$ (O为原点), 那么再结合$\angle CAB=90°$, $|AM|=|BM|=|CM|=\frac{1}{2}|BC|$, 即可迅速解题.

解: 设$M(x,y)$, 连结OC、OM、MA, 则由"垂径定理"知,

$\because$ M为BC的中点, $\therefore OM\perp BC$,

$\therefore |OM|^2+|MC|^2=|OC|^2$.

$\because$ 在直角$\triangle ABC$中,

$|AM|=|BM|=|CM|=\frac{1}{2}|BC|$,

$\therefore |OM|^2+|AM|^2=|OC|^2$,

即$x^2+y^2+(x-3)^2+y^2=25$.

$\therefore$ M点的轨迹方程为

$x^2+y^2-3x-8=0$.

2.巧用"切割线定理"

例2 已知直线$y=mx\,(m\in\mathbf{R})$与圆C: $x^2+y^2-6x+5=0$相交于两点P、Q, 则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=$________.

分析: 将直线方程代入到圆方程$(x-3)^2+y^2=4$中, 进行消元, 利用韦达定理解题, 运算较繁. 注意到向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$方向相同,用"切割线定理"来解题, 可得以下两种简解.

解法一: 过原点O作圆的切线, 设切点为M, 则由"切割线定理"知, $|OP|\cdot|OQ|=|OM|^2=|OC|^2-4=5$.

$\because$ 向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$方向相同,

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|OP|\cdot|OQ|=5$.

解法二: 圆C与x轴有两个交点$A(1,0)$、$B(5,0)$,

$\because$ 向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$方向相同,

$\therefore$ 由"切割线定理"知,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|OP|\cdot|OQ|=|OA|\cdot|OB|=5$.

例3 一圆过两点$A(2,1)$、$B(10,5)$, 且与x轴切于点C, 则点C到原点O的距离$|OC|=$________.

分析: 若求出该圆的方程后, 再利用直角三角形求OC的长, 运算较为繁琐. 注意到隐含条件A、B、O三点共线, 根据"切割线定理"得, $|OC|^2=|OA|\cdot|OB|=25$, 则$|OC|=5$.

3.巧用"相交弦定理"

例4 已知$f(x)=(x+2004)(x-2005)$的图象与x轴交于两点A、B, 与y轴交于一点

C, 过A、B、C三点作一圆, 则该圆与y轴的另一个交点D的坐标为________.

分析: 若写出圆的方程后, 再求点D的坐标, 将会导致繁复的运算. 注意到A、B两点的坐标分别为$(-2004,0)$、$(2005,0)$, 而点C的坐标为$(0,-2004\cdot 2005)$, 根据"相交弦定理"可得, $|OA|\cdot|OB|=|OC|\cdot|OD|$, 所以$|OD|=1$, 从而$D(0,1)$.

例5 过原点O且方向向量为$(m,1)$的直线L与圆C: $(x-1)^2+y^2=4$相交于P、Q两点, 则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=$________.

分析: 圆C与x轴交于两点$A(-1,0)$、$B(3,0)$. 利用"相交弦定理"得$|OA|\cdot|OB|=|OP|\cdot|OQ|$, 因而$|OP|\cdot|OQ|=3$. 注意到向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$方向相反, 则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-|OP|\cdot|OQ|=-3$.

4. 巧用圆心角、圆周角等的性质

例6 设直线l: $3x+4y+m=0$与圆C: $x^2+y^2+x-2y=0$相交于P、Q两点, 则当m为何值时, $OP\perp OQ$?

分析: 基本思路是直线方程代入圆方程, 消元后利用$x_1x_2+y_1y_2=0$来求m值. 现借助于圆的几何性质可有如下巧解.

解: 如图2, 因为圆C: $x^2+y^2+x-2y=0$过原点O, 则$\angle POQ$是圆C的圆周角, 且为直角. 根据"圆中90°的圆周角所对的弦是直径"可知PQ为圆C的直径, 即直线$3x+4y+m=0$过圆心$C\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$, 代入直线$l$的方程得, $3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\times 1+m=0$, ∴ $m=-\dfrac{5}{2}$.

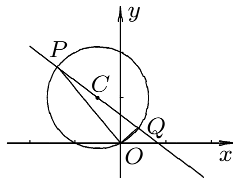


图 2

例7 (2000年全国高考题) 椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的焦点为$F_1$、$F_2$, 点$P$在椭圆上, 当$\angle F_1PF_2$为钝角时, 点$P$横坐标的取值范围是________.

解: 如图3, 以F_1F_2为直径作圆$x^2+y^2=5$, 与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$联立, 解得两曲线交点的横坐标分别为$-\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$和$\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$. 根据"圆中同一条弦所对的圆周角小于它所对的圆内角"这一性质知, 点P在椭圆的AB或CD弧线(如图3, 在辅助圆内)上时, $\angle F_1PF_2$为钝角, 故点P横坐标的取值范围是$-\dfrac{3}{5}\sqrt{5}<x<\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$.

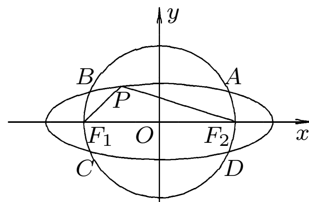


图 3

例8 (1986年全国高考题) 如图4, 平面直角坐标系中, 给定y轴正半轴上两点$A(0,a)$、$B(0,b)$ $(a>b>0)$, 试在x轴正半轴上求一点C, 使$\angle ACB$取得最大值.

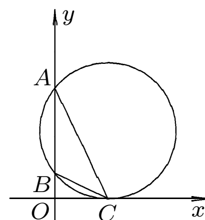


图 4

解: 设C是x轴正半轴上一点, 在$\triangle ABC$中, 由正弦定理有$\sin\angle ACB=\dfrac{a-b}{2R}$, 其中$R$是$\triangle ABC$的外接圆的半径. 可见, 当$R$取最小值时, $\angle ACB$取得最大值.

在过A、B两定点且与x轴正向有交点C的诸圆中, 当且仅当点C是圆与x轴相切的切点时, 半径最小. 故切点C即为所求.

由切割线定理, 得$OC^2=OA\cdot OB=ab$, ∴ $OC=x=\sqrt{ab}$, 即当点C的坐标为$(\sqrt{ab},0)$时, $\angle ACB$取得最大值.

由以上几例可以看出, 有时在解决与圆有关的问题时, 往往只要充分挖掘圆的几何性质, 再将几何条件代数化, 既可以迅速获得解题途径, 又可以减少解析几何的运算量.

巧用一个不等式求最值

750001 宁夏银川市第九中学 田彦武 马小林

贵刊2004(11)发表李建新老师《巧用向量求值》一文(以下简称原文), 经笔者研究发现, 原文中的最值问题都可以用下面的一个不等式加以解决, 而且相比之下较原文在处理上似更简单一些, 故写此文和大家交流.

定理 若实数a、b、x、y满足$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 则$a^2+b^2\geqslant(x+y)^2$.

证明: $a^2+b^2=(a^2+b^2)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$

$=x^2+y^2+\dfrac{b^2x^2}{a^2}+\dfrac{a^2y^2}{b^2}$

$\geqslant x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$.

由证明过程易知等号成立的条件是$\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2}$.

注: 这个不等式的条件是一个椭圆方程, 故称此不等式为椭圆不等式.

1. 求满足整式方程的未知数的代数式的最值

例1 (1988年广东省高考题, 原文例1) 已知x、y满足$x^2+y^2-2x+4y=0$, 求$x-2y$的最值.

解: $x^2+y^2-2x+4y=0\Longleftrightarrow\dfrac{(x-1)^2}{5}+\dfrac{4(-y-2)^2}{20}=1$, 依定理有$5+20\geqslant[(x-1)+2(-y-2)]^2$, 即$(x-2y-5)^2\leqslant25$, 解得$0\leqslant x-2y\leqslant10$, 当且仅当$x-1=\dfrac{-y-2}{2}$且$x^2+y^2-2x+4y=0$, 即

当$x=y=0$时, $(x-2y)_{\min}=0$;

当$x=2$, $y=-4$时, $(x-2y)_{\max}=10$.

例2 (第10届"希望杯"全国数学邀请赛高二培训题) 已知a、$b\in\mathbf{R}$, 且$a+b+1=0$, 求$(a-2)^2+(b-3)^2$的最小值.

解: 令$(a-2)^2+(b-3)^2=t$, 则$\dfrac{(a-2)^2}{t}+\dfrac{(b-3)^2}{t}=1$, 由定理得$2t\geqslant(a+b-5)^2=(a+b+1-6)^2=36$, 即$t\geqslant18$, 当且仅当$a-2=b-3$且$a+b+1=0$时, 即$a=-1$, $b=0$时, $t_{\min}=18$, 从而$(a-2)^2+(b-3)^2$的最小值为18.

2. 求满足三元一次方程及三元二次方程的未知数的最值

例3 (1993年上海市高三数学竞赛试题, 原文例3) 已知实数x_1、x_2、x_3满足方程$x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{3}x_3=1$及$x_1^2+\dfrac{1}{2}x_2^2+\dfrac{1}{3}x_3^2=3$, 求$x_3$的最小值.

解: $x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{3}x_3=1\Longleftrightarrow x_1+\dfrac{1}{2}x_2=1-\dfrac{1}{3}x_3$, $x_1^2+\dfrac{1}{2}x_2^2+\dfrac{1}{3}x_3^2=3\Longleftrightarrow$

$$\frac{x_1^2}{3-\frac{1}{3}x_3^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}x_2\right)^2}{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}x_3^2\right)}=1,$$ 由定理得

$$\left(3-\frac{1}{3}x_3^2\right)+\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}x_3^2\right)\geqslant\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow 3-\frac{1}{3}x_3^2\geqslant\frac{2}{3}\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow 3-\frac{1}{3}x_3^2\geqslant\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}x_3\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{21}{11}\leqslant x_3\leqslant3,$$

从而x_3的最小值为$-\dfrac{21}{11}$$\left(此时x_1=x_2=\dfrac{12}{11}\right)$.

3. 求满足整式方程的未知数的分式的最值

例4 (1990年全国高考试题) 如果实数x、y满足等式$(x-2)^2+y^2=3$, 求$\dfrac{y}{x}$的最大值.

解: 令 $\frac{y}{x}=k$, 则 $y=kx$, 由已知等式 $(x-2)^2+y^2=3$ 可得 $\frac{(2k-kx)^2}{3k^2}+\frac{(kx)^2}{3}=1$,

$\therefore$ 由定理得 $3+3k^2\geqslant 4k^2$, 即 $k^2\leqslant 3$,

$\therefore -\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$,

当且仅当 $\frac{2k-kx}{3k^2}=\frac{kx}{3}$ 且

$(x-2)^2+y^2=3$,

即 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $k_{\max}=\sqrt{3}$. 从而 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

例5 (第9届"希望杯"全国数学邀请赛高二第1试) 若实数 x、y 适合方程 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$, 那么代数式 $\frac{y}{x+2}$ 的取值范围是______.

解: 令 $\frac{y}{x+2}=t$, 则 $tx-y+2t=0$, 由已知方程得 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, 变形得 $\frac{(tx-t)^2}{4t^2}+\frac{(2-y)^2}{4}=1$,

$\therefore$ 由定理得 $4t^2+4\geqslant(tx-y+2-t)^2=(2-3t)^2$, 解之得 $0\leqslant t\leqslant\frac{12}{5}$ $\left(当 x=1, y=0 时, t=0; 当 x=-\frac{11}{13}, y=\frac{36}{13} 时, t=\frac{12}{5}\right)$,

$\therefore$ 代数式 $\frac{y}{x+2}$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{12}{5}\right]$.

例6 (第10届"希望杯"邀请赛数学竞赛高二试题, 原文例4) 已知实数 x、y 满足方程 $(x+2)^2+y^2=1$, 求 $\frac{y-1}{x-2}$ 的最小值.

解: 设 $\frac{y-1}{x-2}=k$, 则 $y=kx-2k+1$, $(x+2)^2+y^2=1\iff\frac{(-kx-2k)^2}{k^2}+\frac{(kx-2k+1)^2}{1}=1$,

由定理得

$$\begin{aligned}k^2+1&\geqslant[(-kx-2k)+(kx-2k+1)]^2\\&=(1-4k)^2,\end{aligned}$$

解得 $0\leqslant k\leqslant\frac{8}{15}$ (当且仅当 $x=-2, y=1$ 时, k 取到最小值), 即

$\frac{y-1}{x-2}$ 的最小值为0.

4. 求满足不等式的未知数的最值

例7 (2003年"希望杯"全国数学邀请赛高二试题) 若 $2x+y\geqslant 1$, $u=y^2-2y+x^2+6x$, 则 u 的最小值等于……………………………( )

(A) $-\frac{7}{5}$; (B) $-\frac{14}{5}$; (C) $\frac{7}{5}$; (D) $\frac{14}{5}$.

解: $u=y^2-2y+x^2+6x\iff\frac{4(x+3)^2}{4(u+10)}+\frac{(y-1)^2}{u+10}=1$, 依定理及条件有 $5(u+10)\geqslant(2x+y+5)^2\geqslant 36$, 即 $u\geqslant\frac{36}{5}-10=-\frac{14}{5}$, 当且仅当 $\frac{2(x+3)}{4}=y-1$ 且 $2x+y=1$ 时, 即 $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{11}{5}$ 时, $u_{\min}=-\frac{14}{5}$, 故选(B).

例8 (第11届"希望杯"全国数学邀请赛高二第1试, 原文例11) 设 $a>b>c$, 且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 恒成立, 则 n 的最大值是_____.

解: 令 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}=t$, 则 $\frac{1}{t(a-b)}+\frac{1}{t(b-c)}=1$, 从而 $t(a-c)\geqslant(1+1)^2=4$, 由已知得 $a-c>0$, 故 $t\geqslant\frac{4}{a-c}$, 即

$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$,

$\therefore$ n 的最大值是4.

5. 求无理函数的值域

例9 (1994年上海市高三数学竞赛题, 原文例5) 求函数 $y=\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993}$ 的值域.

解: 由 $1994-x\geqslant 0$ 且 $x-1993\geqslant 0$ 得 $1993\leqslant x\leqslant 1994$, 两边平方易得 $y\geqslant 1$ (当 $x=1993$ 或 $x=1994$ 时取等号).

又 $1=\frac{1994-x}{1}+\frac{x-1993}{1}$, 由定理得 $2\geqslant(\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993})^2$, 即 $\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993}\leqslant\sqrt{2}$ (当 $x=1993.5$ 时取等号), 故函数 $y=\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993}$ 的值域是 $1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$.

6. 求满足分式方程的未知数的代数式的最值

例10 (第11届"希望杯"全国数学邀请赛高二培训题) 设 x、y、a、$b\in\mathbf{R}^+$, 且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, 则 $x+y$ 的最小值为_____.

解: 依定理有$x+y\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, 当且仅当$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{b}}{y}$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,即$x=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, $y=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$时, $(x+y)_{\min}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

例11 (1998年湖南省高中数学竞赛试题, 原文例6) 已知x、$y\in(0,+\infty)$, 且$\frac{19}{x}+\frac{98}{y}=1$, 求$x+y$的最小值.

解: 由已知条件和定理有 $x+y\geqslant(\sqrt{19}+\sqrt{98})^2=117+14\sqrt{38}$.

当且仅当$\frac{\sqrt{19}}{x}=\frac{\sqrt{98}}{y}$且$\frac{19}{x}+\frac{98}{y}=1$, 即$x=19+7\sqrt{38}$, $y=98+7\sqrt{38}$时, $(x+y)_{\min}=117+14\sqrt{38}$.

定理的推广 若$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i^2}=1$, 则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^2$, 其中$a_i$与$b_i$同号$(i=1,2,\cdots,n)$.

证明: 由Cauchy不等式及已知条件有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i^2}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2.$$

7. 求使多项式函数取最值的未知数的值

例12 (2001年全国高中数学联赛试题, 原文例7) 求实数x、y的值, 使得$(y-1)^2+(x+y-3)^2+(2x+y-6)^2$达到最小值.

解: 令$(y-1)^2+(x+y-3)^2+(2x+y-6)^2=t$, 则$\frac{(1-y)^2}{t}+\frac{(2x+2y-6)^2}{4t}+\frac{(6-2x-y)^2}{t}=1$, 由定理的推广得 $6t\geqslant[(1-y)+(2x+2y-6)+(6-2x-y)]^2=1$, 即$t\geqslant\frac{1}{6}$, 当且仅当

$$\frac{1-y}{1}=\frac{x+y-3}{2}=\frac{6-2x-y}{1},$$

即$x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{5}{6}$时, $(y-1)^2+(x+y-3)^2+(2x+y-6)^2$取到最小值$\frac{1}{6}$.

8. 求满足分式方程的未知数的分式的最值

例13 (1990年首届"希望杯"全国数学邀请赛培训题, 原文例8) 已知x、y、$z\in\mathbf{R}^+$, $\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2$, 求$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$的最大值.

解: 由$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2$易知$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=1$,

而$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2\iff$

$$\frac{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2}{\frac{2}{1+x^2}}+\frac{\left(\frac{y}{1+y^2}\right)^2}{\frac{2}{1+y^2}}+\frac{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^2}{\frac{2}{1+z^2}}=1,$$

依定理的推广可有

$$\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}+\frac{2}{1+z^2}\geqslant\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)^2,$$

即

$$\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)^2\leqslant 2,$$

从而$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$的最大值为$\sqrt{2}$ (当且仅当$x=y=z=\sqrt{2}$时取到最大值).

9. 求无理式的最值

例14 (第8届"希望杯"全国数学邀请赛高二试题, 原文例9) 如果$a+b+c=1$, 那么$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$的最大值是多少?

解: 由条件知

$(3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=6$,

则$\frac{3a+1}{6}+\frac{3b+1}{6}+\frac{3c+1}{6}=1$,

由定理的推广得

$18\geqslant(\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1})^2$,

故$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leqslant3\sqrt{2}$ (当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$时取到最大值).

10. 求三角函数的最值

例15 (1999年"希望杯"数学邀请赛, 山西、江西、天津赛区高二试题, 原文例12) 设函数$\sqrt{\tan x-1}+\sqrt{3-\tan x}$的最大值为$M$, 最小值为$N$, 则$\frac{M}{N}$是多少?

解: 由$1\leqslant\tan x\leqslant3$容易知道$\sqrt{\tan x-1}$

与直线方程有关的三个最值问题

200436 上海大学附属中学 喻碧波 王敏杰

在解析几何中, 以下问题比较典型. 如图1, 直线l过点$P(1,2)$, 分别交x轴、y轴正半轴于A、B两点. 若再添加一条件, 就可确定直线l的方程. 由于问题涉及直线与坐标轴的交点, 故可考虑直线的截距式方程, 设直线l: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, 其中$A(a,0)$、$B(0,b)$, 然后待定求解. 本文将在此条件下, 对三个最值问题给出解答, 并作出几何解释.

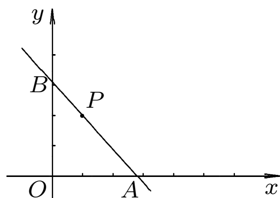


图 1

问题1: $\triangle AOB$面积何时最小?

由图形知, $\triangle AOB$的面积$S=\frac{1}{2}ab$有最小值. 因为直线l过点$P(1,2)$, 所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. 欲使$\triangle AOB$的面积最小, 由均值不等式可得$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$, 所以$ab\geqslant 8$, 即$\triangle AOB$的面积有最小值4, 当且仅当$a=2$, $b=4$时等号成立. 此时直线l: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$.

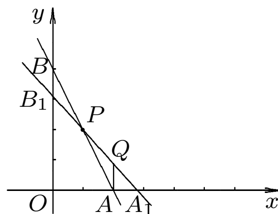


图 2

注意到此时P恰好为线段AB的中点. 该问题的几何解释为: P为第一象限内一点, 过P的直线交坐标轴正半轴于A、B两点, 当P恰好为线段AB的中点时, $\triangle AOB$的面积最小. 如图2, 另有过P的直线交坐标轴于点A_1、B_1.

~~~~~~

$+\sqrt{3-\tan x}\geqslant\sqrt{2}$(当$\tan x=1$或$\tan x=3$时取等号), 即$N=\sqrt{2}$.

又有$\frac{\tan x-1}{2}+\frac{3-\tan x}{2}=1$, 由定理得$4\geqslant(\sqrt{\tan x-1}+\sqrt{3-\tan x})^2$,

从而可得

$\sqrt{\tan x-1}+\sqrt{3-\tan x}\leqslant 2$(当$\tan x=2$时取等号), 即$M=2$, 故$\frac{M}{N}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

11. 求对数函数的最值

例16 (第13届"希望杯"全国邀请赛高二培训题, 原文例13) 已知$ab=1000$, $a>1$, $b>1$, 则$\sqrt{1+\lg a}+\sqrt{1+\lg b}$的最大值是多少?

解: 由已知易得

$(1+\lg a)+(1+\lg b)=5$,

即 $\frac{1+\lg a}{5}+\frac{1+\lg b}{5}=1$,

由定理有

$10\geqslant(\sqrt{1+\lg a}+\sqrt{1+\lg b})^2$,

从而$\sqrt{1+\lg a}+\sqrt{1+\lg b}\leqslant\sqrt{10}$,

即$\sqrt{1+\lg a}+\sqrt{1+\lg b}$的最大值是$\sqrt{10}$(当且仅当$a=b=10\sqrt{10}$时取到最大值).

以下两题可供练习.

1. (1990年日本IMO代表队第一轮选拔赛题)设x、y、$z\in\mathbf{R}^+$, 且$x+y+z=1$, 求$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$的最小值 (答案: 36).

2. (第12届"希望杯"全国数学邀请赛高一培训题) 函数$y=\sqrt{3}x-\sqrt{1-x^2}$的最小值为____ (答案: -2).

参考文献

[1] 李建新. 巧用向量求值. 数学教学.2004.11.
~~~~~~

过A作BB_1的平行线, 交A_1B_1于点Q, 易知$AQBB_1$为平行四边形, 故$S_{\triangle PAQ}=S_{\triangle PBB_1}$, 所以$S_{\triangle OA_1B_1}-S_{\triangle OAB}=S_{\triangle QAA_1}>0$, 即当$P$为$AB$中点时, $\triangle AOB$的面积最小. 可以知道, 当$\angle AOB$不是直角时, 命题仍然成立.

问题2: $\triangle AOB$周长何时最小?

$\triangle AOB$的周长$C=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$, 其中$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$. 这是关于$a$、$b$的条件不等式, 可先将$\sqrt{a^2+b^2}$放缩为$a$、$b$的一次式, 再利用不等式求最小值. 此处需两次利用不等式, 为使不等式两次取等号时, a、b取值一致, 可引入待定系数θ.

设$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\geqslant a\cos\theta+b\sin\theta,$$

当且仅当$\dfrac{a}{\cos\theta}=\dfrac{b}{\sin\theta}$, 即$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$时等号成立. 所以

$$\begin{aligned}C&=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\\&\geqslant a(1+\cos\theta)+b(1+\sin\theta)\\&=[a(1+\cos\theta)+b(1+\sin\theta)]\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\\&=3+\cos\theta+2\sin\theta\\&\quad+\frac{2a(1+\cos\theta)}{b}+\frac{b(1+\sin\theta)}{a}\\&\geqslant 3+\cos\theta+2\sin\theta\\&\quad+2\sqrt{2(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)},\end{aligned}$$

当且仅当$\dfrac{2a(1+\cos\theta)}{b}=\dfrac{b(1+\sin\theta)}{a}$时, 两等号同时取到, 故

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2(1+\cos\theta)}{1+\sin\theta}.$$

再结合$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$可得, $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, 所以$a=\dfrac{10}{4}$, $b=\dfrac{10}{3}$, 直线$l: 4x+3y=10$, 此时$\triangle AOB$的周长最小, 为$\dfrac{10}{4}+\dfrac{10}{3}+\dfrac{50}{12}=10$.

此时的几何意义可解释为, 以O、P为焦点的椭圆与x、y正半轴交于A、B, 当A、P、B三点共线时即为所求. 如图3, 由椭圆的光学性质知, 光线可从O点出发, 射向B点, 经椭圆壁反射, 经过点P、A可回到O点. 根据费马原理, 此时$\triangle AOB$的周长最小. 本文猜测, 当$\angle AOB$不是直角时, 对应的几何命题仍然成立.

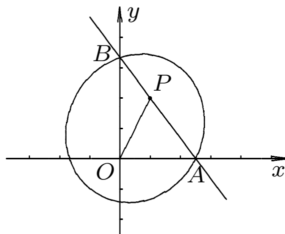


图 3

问题3: 线段AB何时最短?

线段AB的最小值与$\triangle AOB$的周长最小值求解方法类似, 过程更简单.

设$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\&\geqslant a\cos\theta+b\sin\theta\\&=(a\cos\theta+b\sin\theta)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\\&=\cos\theta+2\sin\theta+\frac{2a\cos\theta}{b}+\frac{b\sin\theta}{a}\\&\geqslant\cos\theta+2\sin\theta+2\sqrt{2\sin\theta\cos\theta},\end{aligned}$$

第一个不等式等号成立时, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

第二个不等式等号成立时, $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}$.

所以$\operatorname{tg}\theta=\sqrt[3]{2}$, $a=1+\sqrt[3]{4}$, $b=2+\sqrt[3]{2}$, 此时线段AB长最小为$(1+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$,

直线l: $\dfrac{x}{1+\sqrt[3]{4}}+\dfrac{y}{2+\sqrt[3]{2}}=1$.

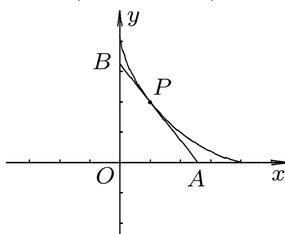


图 4

该问题的几何解释为, 长度为d的线段AB, 两端点分别在x轴、y轴正半轴移动, 当点P恰好在线段AB所形成的包络上时, d为最小值, 经过点P的线段AB即为所求. 长度为

(下转封底)

⊙?⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙

数 学 问 题 与 解 答

2005年第4期问题解答

⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙!⊙

641. P为$\triangle ABC$的内心, 射线BP交AC于Q, 当$\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PC}=\dfrac{1}{PQ}$时, 求$\angle A$的大小.

解: 记$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, 如图1.

图 1

$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}\Longleftrightarrow 1+\frac{PB}{PC}=\frac{PB}{PQ}.$$

$\because P$为$\triangle ABC$内心,

$$\therefore \frac{PB}{PQ}=\frac{a}{CQ}=\frac{c}{AQ}=\frac{a+c}{b},$$

$$\frac{PB}{PC}=\frac{\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}.$$

又$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\therefore 1+\sqrt{\frac{c(p-b)}{b(p-c)}}=\frac{a+c}{b},$$

$$\sqrt{\frac{c(p-b)}{b(p-c)}}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{2(p-b)}{b},$$

即$bc=4(p-b)(p-c)$.

于是 $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\angle A}{2}=30^\circ, \angle A=60^\circ$.

$\therefore$当$\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PC}=\dfrac{1}{PQ}$时, $\angle A=60^\circ$.

642. 设M、N分别是矩形$ABCD$的边BC、DA的中点, MN交AC于点O. 若线段OA上存在点P, 使直线PN被直线CD和直线AC所截得的线段长PQ等于PM, 求$\angle ACD$的取值范围.

解: 如图2, 记$\angle ACD=\alpha$, 则$\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. 延长PM、DC交于E, 连接MQ. 记$\angle E=\beta$, 由条件知, O为MN的中点. 且$MN/\!/EQ$, 故$\dfrac{MO}{EC}=\dfrac{PO}{PC}=\dfrac{ON}{CQ}$, $EC=CQ$. 从而$ME=MQ$, $\angle MQC=\beta$, $\angle PMQ=2\beta$.

图 2

又由$PQ=PM$知

$\angle PQM=2\beta, \angle PQC=3\beta$.

由P在线段OA上知$\angle PQC\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 于是$\beta\leqslant\dfrac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned}\cot\alpha&=\frac{CD}{DA}=\frac{CD}{2ND}=\frac{CQ-QD}{2ND}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{CQ}{MC}-\frac{DQ}{ND}\right)\\&=\frac{1}{2}(\cot\beta-\cot 3\beta)\\&=\frac{\sin 2\beta}{2\sin\beta\sin 3\beta}=\frac{\cos\beta}{\sin 3\beta}\end{aligned}$$

$\geqslant \cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

等号成立的条件是$\beta=\dfrac{\pi}{6}$, 故$0<\angle ACD \leqslant \operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 即

$\angle ACD$的取值范围为$\left(0,\operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

643. 设α_1、α_2、α_3、$\alpha_4>0$, 且$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\pi$, 求证:

$\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_4+\alpha_1)\geqslant 4\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4$.

证: 作$\triangle ABC$, 使$\angle BAC=\alpha_2, \angle BCA=\alpha_3$($AC$长任意). 再作$\triangle ABC$的外接圆, 半径记为$R$. 在$\triangle ABC$形外, 作$\angle CAD=\alpha_1$, AD与$\triangle ABC$外接圆相交于点D, 连CD.

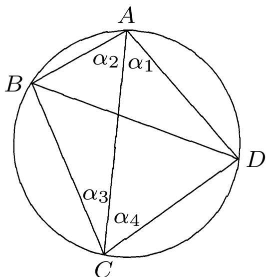


图 3

$\because \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\angle ACD$
$=\angle BAD+\angle BCD=\pi$
$=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,
$\therefore \angle ACD=\alpha_4$.

于是由正弦定理,

$AC=2R\sin(\alpha_4+\alpha_1)=2R\sin(\alpha_2+\alpha_3)$,
$BD=2R\sin(\alpha_1+\alpha_2)=2R\sin(\alpha_3+\alpha_4)$,
$AB=2R\sin\alpha_3$, $BC=2R\sin\alpha_2$,
$CD=2R\sin\alpha_1$, $DA=2R\sin\alpha_4$.

故原不等式等价于

$AC^2\cdot BD^2\geqslant 4AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA$.

后者是显然的, 这是因为由托拉密定理,

$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot DA\geqslant 2\sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}$.

644. 设$x_i(i=1、2、3、4)$为正实数, 满足$x_1\leqslant 1, x_1+x_2\leqslant 5, x_1+x_2+x_3\leqslant 14, x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 30$,求

$U=x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{3}x_3+\dfrac{1}{4}x_4$的最大值.

解: 令

$$\begin{cases} y_1=x_1-1,\\ y_2=x_1+x_2-5,\\ y_3=x_1+x_2+x_3-14,\\ y_4=x_1+x_2+x_3+x_4-30,\end{cases}$$

则$y_i\leqslant 0\,(i=1、2、3、4)$, 且

$$\begin{cases} x_1=y_1+1,\\ x_2=-y_1+y_2+4,\\ x_3=-y_2+y_3+9,\\ x_4=-y_3+y_4+16.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}U&=y_1+1+\frac{1}{2}(-y_1+y_2+4)\\&\quad+\frac{1}{3}(-y_2+y_3+9)+\frac{1}{4}(-y_3+y_4+16)\\&=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{6}y_2+\frac{1}{12}y_3+\frac{1}{4}y_4+10\leqslant 10,\end{aligned}$$

当$y_1=x_1-1=0, y_2=x_1+x_2-5=0, y_3=x_1+x_2+x_3-14=0, y_4=x_1+x_2+x_3+x_4-30=0$, 即$x_1=1, x_2=4, x_3=9, x_4=16$时, $U_{\max}=10$.

645. 设P及l为一平面内的一定点及一定直线, 过P作n条直线$l_1, l_2, \cdots, l_n\ (n\geqslant 2)$, 如果这$n$条直线中相邻的两条所成的角都是$\dfrac{\pi}{n}$, 又$l_i$与$l$交于点$M_i(i=1,2,\cdots,n)$, 求证: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{PM_i^2}$为定值.

证: 如图4, 设$\angle PM_nM_1=\theta$,则

$\angle PM_1M_n=\dfrac{\pi}{n}-\theta, \angle PM_2M_n=\dfrac{2\pi}{n}-\theta, \cdots, \angle PM_{n-1}M_n=\dfrac{(n-1)\pi}{n}-\theta$.

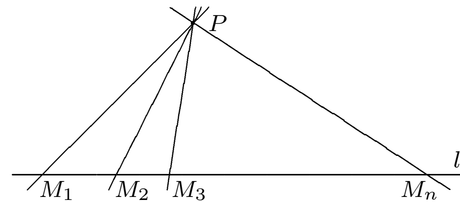


图 4

在$\triangle PM_1M_n$中, 由正弦定理,

$$\frac{\sin\theta}{PM_1}=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}-\theta\right)}{PM_n},$$

$$\therefore \frac{1}{PM_1^2}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)}{PM_n^2\sin^2\theta}.$$

同理, $\frac{1}{PM_i^2}=\frac{\sin^2\left(\frac{i\pi}{n}-\theta\right)}{PM_n^2\sin^2\theta}$, $i=2,3,\cdots,n$.

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{PM_i^2}=\frac{1}{PM_n^2\sin^2\theta}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\left(\frac{i\pi}{n}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{PM_n^2\sin^2\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-2\theta\right)}{2}$$

$$=\frac{1}{PM_n^2\sin^2\theta}\left[\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-2\theta\right)\right].$$

$$\because \sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-2\theta\right)$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-2\theta\right)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sin\left[\frac{(2i+1)\pi}{n}-2\theta\right]-\sin\left[\frac{(2i-1)\pi}{n}-2\theta\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{n}-2\theta\right]-\sin\left(\frac{\pi}{n}-2\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos\left[\frac{(n+1)\pi}{n}-2\theta\right]\sin\pi=0,$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{PM_i^2}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{PM_n^2\sin^2\theta}.$$

显然, $PM_n^2\sin^2\theta$为点P到直线l距离的平方, 为定值, 所以$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{PM_i^2}$为定值.

2005年第6期问题

646. 如图5, 在$\triangle ABC$中, $\angle C=4\angle A$, CD是角平分线, 且$AD=DC+BC$, 求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的大小.

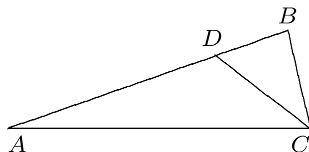


图 5

(福建 陈四川供题)

647. 若实数a满足$a^9-a^5+a=2$, 求证: $\sqrt[12]{3}<a<\sqrt[5]{2}$.

(湖南 厉 倩供题)

648. 设p_1、$p_2\in\mathbf{Z}^+$, $p_1<p_2$, 若存在a、$b\in\mathbf{Z}^+$, 使得$p_1=a^2+1$, $p_2=b^2-1$, 则对$n\in\mathbf{Z}^+$, 当p_1n+r_1和p_2n+r_2(r_1、$r_2\in\mathbf{Z}^+$, $r_1<p_1$, $r_2<p_2$)均为平方数且$p_2r_1>p_1r_2$时, 数$(p_1+p_2)n+(r_1+r_2+p_2r_1-p_1r_2)$必非质数.

(四川 方廷刚供题)

649. 非负实数a、b、c、d满足$a^3+b^3+c^3+d^3=1$, 求证: $\frac{a^2}{1+bcd}+\frac{b^2}{1+cda}+\frac{c^2}{1+dab}+\frac{d^2}{1+abc}\geqslant 1$.

(陕西 安振平供题)

650. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数, 则

(1) 当$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant n-1$时, $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$;

(2) 当$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<n-1$时, $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}>1$.

(四川 蒋明斌供题)

(上接第6-25页)
$(2-3.2)^2\times0.4+(10-3.2)^2\times0.2=11.76.$

$E\eta=1\times0.1+2\times0.6+3\times0.3=2.2,$

所以η的方差为$D\eta=(1-2.2)^2\times0.1+(2-2.2)^2\times0.6+(3-2.2)^2\times0.3=0.144+0.024+0.192=0.36.$

可以看出, 虽然甲得分的期望值高于战士乙, 但他得分的方差也远远地高于乙得分的方差, 这说明甲的技术稳定性不够, 即使偶尔有得10分的时候(虽然对手至多才能得3分), 但遇到只是一次或一枪定胜负的时候, 他就未必能占到先机了.

(上接第6–36页)

20(°C).

(Ⅱ) 图中从 6 时到 14 时的图象是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的半个周期的图象.

因$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-6\Longrightarrow\omega=\frac{\pi}{8}$;

$A=\frac{1}{2}(30-10)=10$;

$b=\frac{1}{2}(30+10)=20$.

这时$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)+20$.

因点(6,10)是图象上已知最低点, 则由上述分析知 $\frac{\pi}{8}\cdot 6+\varphi=\frac{3}{2}\pi\Longrightarrow\varphi=\frac{3}{4}\pi$.

故解析式为$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3}{4}\pi\right)+20$ $(x\in[6,14])$.

编后漫笔

当心“去数学化”

张奠宙　赵小平

临近发稿, 适逢项武义教授来访. 座谈中提到数学教育中有“去数学化”的倾向. 细细想来, 觉得颇“切中时弊”.

数学教育, 自然是以“数学”内容为核心. 数学课堂教学的优劣, 自然应该以学生是否能学好“数学”为依归. 也就是说, 教育手段必须为数学内容服务. 可惜的是, 这样的常识, 近来似乎不再正确了. 君不见, 评论一堂课的优劣, 只问教师是否创设了现实情境? 学生是否自主探究, 气氛是否活跃? 是否分小组活动? 用了多媒体没有? 至于数学内容, 反倒可有可无起来.

再看近些年的一些数学教育研究文章, 尤其是一些博士、硕士的学位论文, 数学几乎看不见了. 通篇是教育学、心理学的语汇, 结果无非是为某教育理论的正确做一个“数学注解”, 涂了点“数学”的油彩而已. 当大批的数学教育博士、硕士走上讲台, 或成为数学教育的专家或领导, 掌握着数学教育的命脉, 就有可能使“去数学化”成为一种潮流.

当然, 数学教育不能离开一般教育规律的指导, 但是, 数学教育必须研究自己的特殊规律. 打个比方, 航天工程必然会依据一般力学的原理进行设计, 却也一定要寻求航天本身的技术规律. 在攻克航天技术难关的同时, 反过来又会丰富“一般力学”的理论, 乃至出现“航天力学”这样的新学科.

“去数学化”倾向会危及数学教育的生命. 数学教育倘若不能对一般教育提供特定的规律性认识, 数学教育学科就没有独立存在的价值. 实际上, 数学教学设计的核心是如何体现“数学的本质”、“精中求简”、“返朴归真”, 呈现数学特有的“教育形态”, 使得学生高效率、高质量地领会和体验数学的价值和魅力. 离开自己的实践, 将会一事无成. 多一些数学本质的探究, 少一些空洞的说教, 学生幸甚, 学校幸甚.

数学教育啊, 可否能更多地关注“数学”的特性?

(上接第6–45页)

d的线段所形成的包络曲线方程为$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$, 如图4. 这样, 将$P$点的坐标代入就可得线段$AB$的最小值. 本文猜测, 当$\angle AOB$不是直角时, 几何命题仍然成立, 只是相应的包络曲线方程难以表征.

图1中所包含的有关最值问题还有很多, 本文仅举三例以抛砖引玉.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第6期
(总第213期)
主编: 张奠宙　赵小平
常务副主编: 忻重义
电　话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出　　版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字 0 7 0 1 7 号
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math. ecnu. edu. cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357